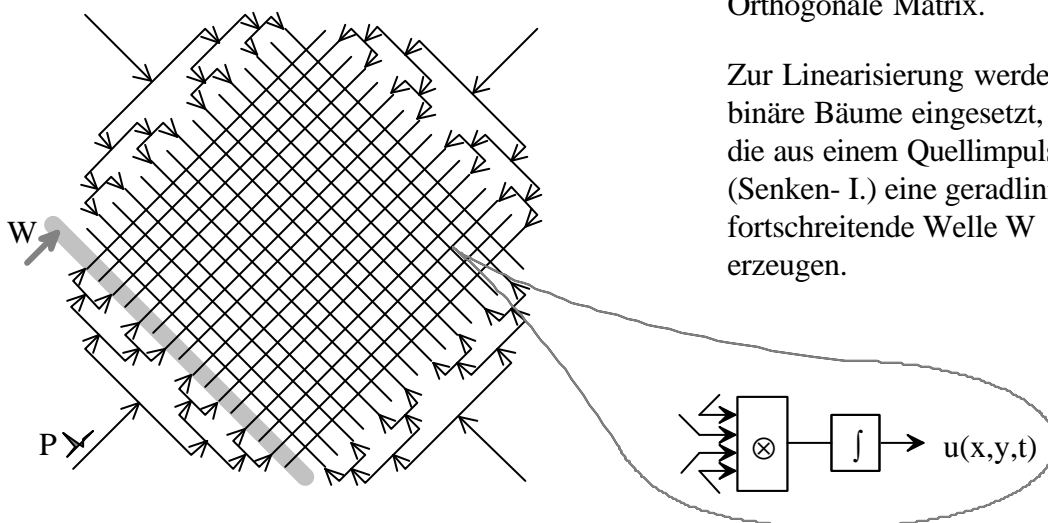


## Abbildungen ohne Brechzahländerung

Aus der Mathematik sind Geometrien bekannt, die Abbildungen ohne Brechzahländerung gestatten. Sie weisen Eigenschaften aus, vermittels einer Richtungsänderung (Reflexion) eines Strahls am Kurvenkörper gleiche Signallaufzeiten zwischen zwei Brennpunkten (einer davon kann im Unendlichen liegen) zu erzielen. Damit entstehen Möglichkeiten, gezielt Impulse von einem Ort zum anderen zu übertragen, wobei die Festlegung der Verbindung zwischen Orten über die Geometrie der Brechungspunkte oder Reflexionspunkte entschieden wird. Mithin erkennt man an der äußeren Gestalt eines neuronalen Gebietes die Art der Verknüpfung zwischen verschiedenen Bezirken oder Punkten.

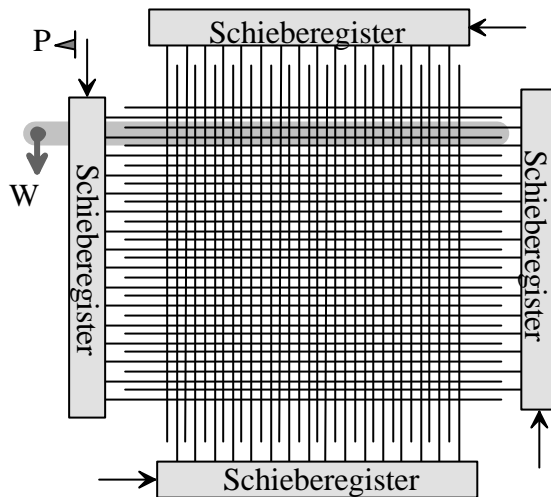
## Orthogonale Matrix

Im Gegensatz zur Wellenausbreitung im freien Raum ist es in elektrischen Netzwerken möglich, 'Strahl' und Leitbahnverlauf beliebig zu krümmen. Eine hyperbolische Abbildung kann entzerrt, dh. orthogonalisiert werden, wenn ein zentrischer Strahlengang vermieden wird. Dazu ist es nötig, den Quell- oder Senkenpunkt der Impulse linienhaft zu gestalten. Stehen applikationsbedingt prinzipiell nur Leitbahnen mit begrenzter Ausbreitungsgeschwindigkeit zur Verfügung, eignet sich ein *binärer Baum* für diesen Zweck. Das Bild zeigt eine zweidimensionale Anordnung mit einfacher Redundanz (vier Übertragungskanäle), die durch binäre Baumschaltungen angesteuert wird.



Durch den binären Baum wird jeder Quellimpuls  $P$  zur ebenen Wellenfront  $W$  aufgefächert. Die Laufzeit vom Stamm zu allen Blättern kann durch sorgfältige Symmetrierung jeder Ausfächerungsebene gleichgroß gestaltet werden.

Sind in einer Anwendung zusätzlich Leitbahnen realisierbar, die eine vernachlässigbar kleine Laufzeit besitzen, schmilzt der Binärbaum auf den Quell- oder Senkenknoten zusammen. Eine Abbildungsschaltung mit Schieberegistern macht von dieser Möglichkeit Gebrauch.



Entzerrte Abbildungsmatrix mit Schieberegistern.

An je einem Kreuzungspunkt von vier aus den Himmelsrichtungen kommenden Leitungen liegt ein Multiplizierer für vier Variablen. Die dargestellten Leitbahnen sollten hinreichend verzögerungsfrei sein.

Die verzögernde Leitbahn ist die Schieberegisterkette selbst. Alle anderen Leitbahnen besitzen vernachlässigbare Laufzeit. Im Gegensatz zur *Baumrealisierung*, bei der die Wellenfront orthogonal auf den sie tragenden Leitbahnen steht, verschiebt sich beim Schieberegister die Wellenfront  $W$  parallel zur Leitbahnausrichtung. Es ist zu beachten, daß mit der Benutzung von Schieberegistern der gesamte Informationsfluß zeitlich diskretisiert wird. Es ist nicht möglich, vollständig gefärbte Spalten, Zeilen oder Flächen in einem Zyklus zu übertragen, ohne Interferenzfehler zu verursachen, siehe dazu Abschnitt *Kenngrößen von Pulsinterferenzsystemen*.

### Wellenfunktion an einem Ort der Matrix

Besitzt eine eindimensionale Welle die Darstellung einer Ortszeitfunktion

$$f(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

so lassen sich die Zeitfunktionen aller Koordinaten eines Paares gegeneinanderlaufender Wellen  $g_1$ ,  $g_2$  zu

$$f(x, t) = g_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \otimes g_2\left(\frac{x}{v} - t\right)$$

bestimmen. Die Interferenz gegeneinanderlaufender Wellen stellt das Faltungsintegral oder bei diskreter Betrachtung eine Faltungssumme (Summe der Partialprodukte bzw. Mittelwert) dar.

Das Symbol  $\otimes$  wird anstelle des Multiplikationssymbols benutzt, um die Nutzung anderer *Interferenzoperatoren* zuzulassen.

Kreuzen sich zwei Wellen unter beliebigem Winkel entlang der Richtungen  $x$  und  $y$  ( $x$  und  $y$  sind nicht notwendig orthogonal zueinander), gilt für jeden Punkt  $P(x, y)$

$$f(x, y, t) = g\left(t - \frac{x}{v}\right) \otimes h\left(t - \frac{y}{v}\right).$$

Für die orthogonale Matrix gilt folglich für jeden Punkt  $P(x, y)$

$$f(x, y, t) = g_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \otimes g_2\left(\frac{x}{v} - t\right) \otimes h_1\left(t - \frac{y}{v}\right) \otimes h_2\left(\frac{y}{v} - t\right).$$

### Vierfach- Faltungsintegral

In jedem Punkt der Matrix ist das (Faltungs-) Integral über alle einlaufenden, miteinander verknüpften Funktionen  $f(x, y, t)$  zu bilden.

$$u(x, y, t) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, y, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ g_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \otimes g_2\left(\frac{x}{v} - t\right) \otimes h_1\left(t - \frac{y}{v}\right) \otimes h_2\left(\frac{y}{v} - t\right) \right\} dt$$

### Matrixnotation der Wellenfunktion

Zur Simulation eines orthogonalen Interferenzfeldes kann eine Matrix- Notation nützlich sein. In Matrixschreibweise haben wir es mit Matrix- Matrix- Multiplikationen zu tun. Werden die einkommenden Pulsfolgen als Vektoren aufgefaßt, die sich jeweils von Zeitpunkt zu Zeitpunkt um eine Matrixposition verschieben, so entspricht ein Orts- Zeitbild eines solchen Vektors der Zusammenfassung aller jeweils um eine Position verschobenen Zeilen bzw. Spalten. Die örtliche und zeitliche Matrixdarstellung eines interferenziellen Übertragungskanals entspricht demnach einer Bandmatrix. Wird zur Vereinfachung der Darstellung davon ausgegangen, daß sich die Information auf einem Übertragungskanal zyklisch wiederholt, dh. daß auf  $a_n$  wiederum  $a_1$  folgt, entsteht eine symmetrische Matrix (symmetrische Matrix:  $A^T = A$ , Zeilen und Spalten vertauschbar).

$$A_{n,n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \\ \vdots & & & \\ a_n & a_1 & & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B_{n,n} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_2 & \cdots & b_n & b_1 \\ \vdots & & & \\ b_n & b_1 & & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Das in der  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte stehende Element einer beliebigen, kettbaren Produktmatrix  $C(n,m) = A(n,p) * B(q,m)$  ergibt sich als Skalarprodukt des  $i$ -ten Zeilenvektors mit dem  $k$ -ten Spaltenvektor.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j$$

Die aus  $A$  und  $B$  entstehende Produktmatrix

$$C_{n,n} = A_{n,n} B_{n,n}$$

ist zu  $A$  und  $B$  antisymmetrisch, ihre erste Zeile entspricht der letzten Spalte etc..

$$c_{i,k} = c_{k,(-i+n+1)}, \quad C \neq C'$$

Folgende Regeln sind für die Multiplikation von symmetrischen  $X'$  und antisymmetrischen Matrizen  $X^*$  herleitbar:

- $A' B' = C^*$
- $A' B^* = C'$
- $A^* B' = C'$
- $A^* B^* = C'$

Bei der Bildung eines mehrkanaligen Interferenzproduktes ist in Analogie zur Physik (siehe *Unterbestimmte Abbildungen*) die Richtung und Reihenfolge der Multiplikation zu beachten. Für die Multiplikation einer Reihe symmetrischer Matrizen  $((A'B')C)D'$ , wie für die paarweise Multiplikation alternierender Matrizen  $(A'B^*)(C'D^*)$  alterniert die Symmetrierichtung, diese Formen sind burstfrei.

Die Summation der Partialprodukte  $p_{ik}$  bei der Multiplikation der Zeilen- und Spaltenvektoren entspricht inhaltlich einer Integration des Signals. Für Signale der Höhe  $h$  entstehen pro Element einer Produktmatrix  $n$  zu summierende Partialprodukte, entsprechend ist die Signalhöhe des Ergebnissignals pro Matrixprodukt durch  $nh^2$  zu dividieren, wenn  $n$  die Dimension der

quadratischen Matrizen darstellt.

$$Y = \left(\frac{1}{nh^2}\right)^3 ((A'B')C')D' = \left(\frac{1}{nh^2}\right)^3 (A'B^*)(C'D^*)$$

Diese Ergebnismatrix des vierfach- Interferenzproduktes zeigt am Korrekturfaktor, wie jeder hinzugenommene Übertragungskanal das Ergebnis zur Potenz schärft.

## Elliptische Abbildung

Man versteht die Ellipse als den geometrischen Ort aller Punkte einer Ebene, für die die *Summe* der Abstände von zwei Brennpunkten  $F, F'$  konstant ist.

Entsprechend sind über beliebige Randpunkte gehende Laufzeiten zwischen beiden Brennpunkten in ihrer Summe konstant. Folglich kann eine Abbildung von einem Punkt  $F$  in einen Punkt  $F'$  über alle Wege übertragen werden, die die Randkurve einer Ellipse als Spiegelfläche besitzen, wenn diese Punkte Brennpunkte der Ellipse sind. Für die Ellipse gilt

$$g + h = 2a = vt$$

$$a^2 = b^2 + e^2$$

wobei  $a$  und  $b$  die halben Längen der Hauptachsen darstellen,  $e$  die Exzentrizität der Ellipse und  $g$  und  $h$  die betrachteten Radiusvektoren (Leitbahnabschnitte) sein mögen.

Im folgenden Bild ist eine Abbildung mit drei Leitbahnen von  $F$  nach  $F'$  dargestellt. Sie besitzen dieselbe Laufzeit  $vt = g + h = 2a$ . Ein Erregungsimpuls, der von  $F$  ausgeht, kann mit einem multiplikativ wirkenden Empfänger genau im Ort  $F'$  nachgewiesen werden, wenn die Eingänge des Empfängers an Leitbahnen angeschlossen sind, deren Knickpunkte auf der Ellipsenbahn liegen.

Die Ellipse besitzt die **Mittelpunktgleichung**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bzw. die **Parameterdarstellung**

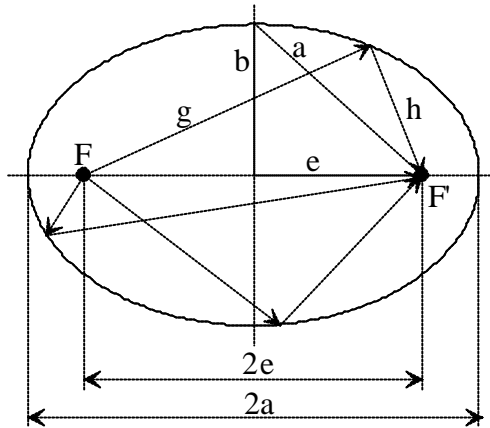
$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t.$$

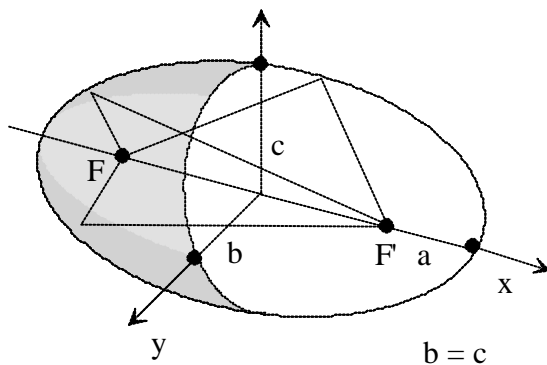
Im Dreidimensionalen besitzt ein Rotationsellipsoid vergleichbare Brennpunkte, zwischen denen Abbildungen auf Bahnen gleicher Laufzeit entstehen. Alle Punkte eines **Ellipsoids** genügen der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wobei  $a, b$  und  $c$  die halben Längen der Hauptachsen darstellen.



Sind zwei der Größen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gleich, so entsteht ein Rotationsellipsoid (zweiachsiges Ellipsoid zweier gleicher Ellipsen) mit zwei Brennpunkten auf der dritten Achse. Zwischen den Brennpunkten  $F$ ,  $F'$  sind wiederum alle Wege, reflektiert am Ellipsoid- Körper, gleich lang. Für  $a = b$  entsteht eine Ellipsoid- Kuppel, deren Grundfläche in der  $xy$ - Ebene kreisförmig ist. Die Brennpunkte lassen sich in der  $xy$ - Ebene ringförmig anordnen.

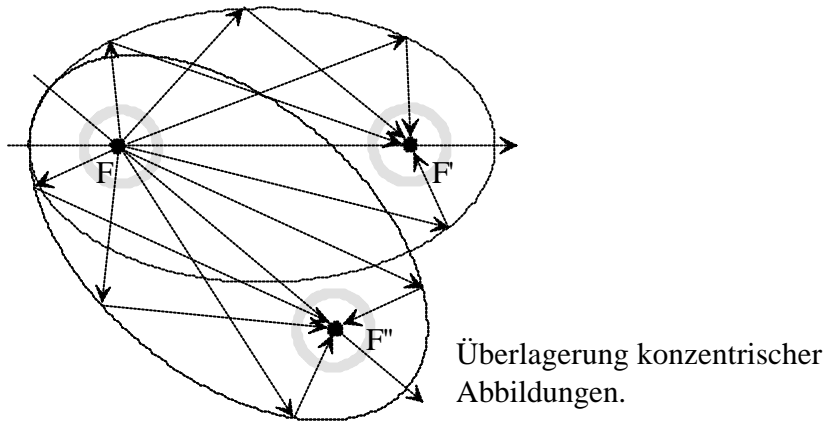


Eine von  $F$  ausgehende Impulsgruppe vereinigt sich im Ort  $F'$ , der nur von der Geometrie der Ellipse und ihrer Brennpunkte bestimmt wird. Als Spezialfall für  $a = b = c = r$  entsteht eine **Kugel** mit im Mittelpunkt vereinigten Brennpunkten  $F = F'$ .

## Überlagerung konzentrischer Abbildungen

Werden Ellipsen so ineinander gesetzt, daß jeweils ein Brennpunkt  $F$  zweier Ellipsen identisch ist, so kann die entstehende Anordnung benutzt werden, um konzentrisch fixierte Abbildungen, die von verschiedenen Orten  $F'$ ,  $F''$  herrühren, pulsgetreu auf einen Ort  $F$  abzubilden und umgekehrt. Dazu ist es erforderlich, daß die Reflexionspunkte aller Leitbahnen auf dem jeweilig gedachten Ellipsen- oder Ellipsoidkörper liegen. Legt man Reflexionspunkte ausschließlich auf den entstehenden Außenkörper, der sich als Vereinigung der Ellipsen oder Ellipsoide ergibt, entstehen Anordnungen, denen die Grundnatur der elliptischen Abbildung kaum noch anzumerken ist. Im Beispiel eine herzförmige Anordnung. Als gedankliches Modell der Gestaltung der elektrischen Überlagerung von Abbildungen in  $F$  kämen Schwellwertmodellierungen<sup>34)</sup> in Betracht. Mehr dazu siehe den Abschnitt *Komplexe A.; Überlagerungs-/ konjugierte Abbildungen*.

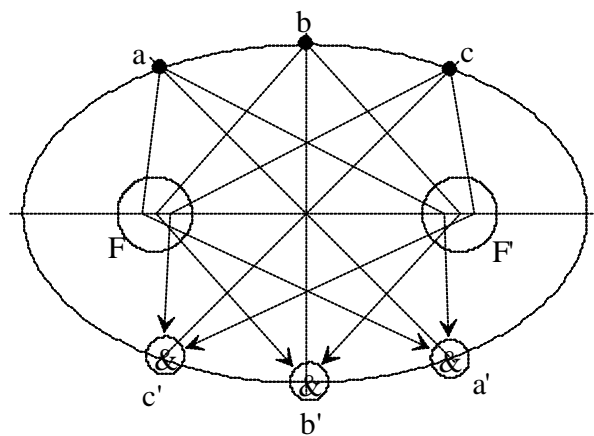
<sup>34)</sup> Hurst, S.L.: Schwellwertlogik . Übersetzung aus dem Engl., Alfred Hüthig- Verlag , 1974.



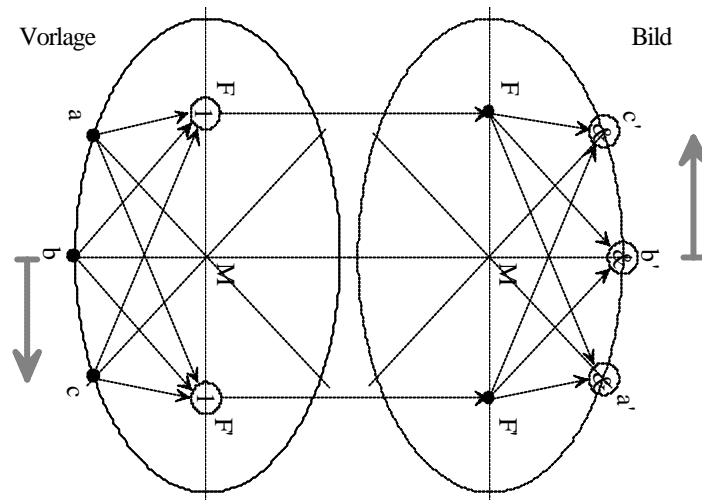
### Elliptische Umkehrung

Invers dazu, wie Abbildungen zwischen den Brennpunkten über die Brechpunkte der Kurve vermittelt werden können, lassen sich Kurvenpunkte als Ort der Abbildung wählen, wenn alle Leitbahnen durch die Brennpunkte der Ellipse (des Ellipsoids) gehen.

Weiter lassen sich die Gebiete der Brennpunkte  $F, F'$  zu impulsammelnden elektrischen Knoten vereinigen, ohne daß die Abbildung zwischen  $a, b, c$  und  $a', b', c'$  verloren geht. Die Sammler haben die logische ODER- Eigenschaft, gekennzeichnet mit dem Buchstaben "I".



Sie lassen jeden logischen Eins- Impulswert passieren, gleich welchen Wert die anderen Eingänge liefern. Das in  $a', b', c'$  entstehende Bild liegt spiegelsymmetrisch zur Vorlage  $a, b, c$ . Der jeweilige Ort eines Bildpunktes ergibt sich als Verlängerung eines durch den Mittelpunkt  $M$  führenden Strahls, der vom Vorlagenpunkt ausgeht. Wird die Ellipse entlang der Ebene  $F, F'$  geteilt, und werden die entstehenden Hälften der Brennpunkte  $F, F'$  mit gleichlangen Drähten verbunden, entsteht eine *pulsgetreue Abbildung* zwischen Vorlage und Bild. Ein synchrones Aufblitzen der Vorlage erzeugt ein synchrones, lediglich um  $2a/v$  (plus Leitungslaufzeit zwischen aufgespaltenen Brennpunkten) zeitverzögertes Aufleuchten auf dem Bildschirm.



Im Dreidimensionalen wären zur  $z$ - Achse rotationssymmetrisch angeordnete Vorlagen- und Bildpunkte zu wählen. Die Brennpunkte bilden dann einen auf einer zur  $z$ - Achse senkrecht stehenden Ebene liegenden Kreisring mit dem Mittelpunkt  $M$ . Eine Vergrößerungswirkung kann erzielt werden, wenn auf Vorlagen- und Bildseite unterschiedlich große, aber zueinander proportionale Geometrien gewählt werden. Pulsgetreu bedeutet, daß Signale auf der Bildseite interferenziell weiterverarbeitet werden können. Die entstandene Geometrie weist auch für eine Abbildung mit Linsen die optimale Geometrie von Vorlagenschirm und Bildschirm aus, bei der eine pulsgetreue, zeitgenaue Abbildung erfolgt. Im Bild ist zu erkennen, daß sowohl senderseitige, als auch empfängerseitige Ellipse gespiegelt benutzt werden können. Ebenso ist es möglich, die Leitbahnführung der Übertragungsleitungen so zu wählen, daß Sende- und Empfangsprojektion in dieselbe Richtung zeigen. Die Übertragungsleitungen können beliebig geknickt, oder gekrümmt werden. Solange Quell- und Senkenpunkte auf räumlich parallelen Ebenen liegen, und die Länge aller Übertragungsleitbahnen identisch ist, bleibt der Wellenfrontverlauf an den Quell- und Senkenpunkten beider Seiten gleich. Die Wellenfrontflächen verbleiben in räumlich- paralleler Ausrichtung zueinander.

## Hyperbolische Abbildung

Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für den die *Differenz* zweier Abstände  $g$ ,  $h$  von zwei Brennpunkten  $F$ ,  $F'$  konstant ist ( $2a$ ).

Es gilt die **Mittelpunktsgleichung**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit den **Asymptoten**

$$y = \pm x \frac{b}{a}$$

Die Asymptotengleichung entsteht aus  $y/x = \pm b/a$ , die Asymptoten steigen mit  $b/a$  an.

Im Koordinatensystem der Asymptoten  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  gilt die **Asymptotengleichung**

$$\xi \psi = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{e^2}{4} = \text{const.}$$

Ein entlang einer hyperbolisch verlegten Leitbahn abgegriffenes, und auf zwei in den Brennpunkten liegende Empfänger geschaltetes Signal kommt unabhängig von der Wahl des Ortes mit stets

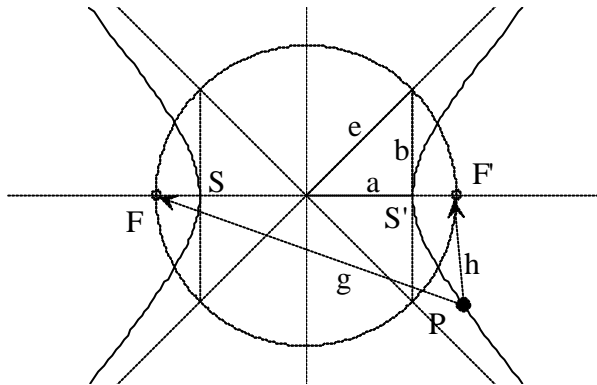
dergleichen **Laufzeitdifferenz** (Betrag:  $2a/v$ ) bei den Empfängern an. Der Scheitelpunktabstand  $SS' = 2a$  bestimmt die Laufzeitdifferenz.

$$|g - h| = 2a$$

Das Vorzeichen der **Wegdifferenz**  $g - h$  alterniert für den rechten und linken Kurventeil, leider wird dieser Umstand durch die Symmetrie der Hyperbel verschleiert. Bekanntlich ist sie nicht eineindeutig.

**Scheitelabstand**  $2a$ , **Brennpunktabstand**  $2e$  und **Krümmung** (in  $b$ ) der Hyperbel sind miteinander verknüpft.

$$e^2 = a^2 + b^2$$



Die Wegdifferenz  $g - h$  kann allerdings nicht größer sein, als der Brennpunktabstand  $2e$  da für nicht entartete Hyperbeln stets gilt  $a < e$ .

$$|g - h| = 2a < 2e.$$

Die Bedeutung dieses Sachverhalts aus der Sicht von Interferenzanwendungen liegt darin, daß die im Hyperbelgebiet erfassbare **zeitliche Tiefe** auf  $\tau$  begrenzt ist, mit

$$\tau = (g - h)/v$$

Die **Exzentrizität**  $e$  ist identisch dem halben Brennpunktabstand, Hyperbelscharen mit gleichen, gemeinsamen Brennpunkten  $F, F'$  aber verschiedenen Scheitelpunkten besitzen die gleiche Exzentrizität  $e$ .

In **Parameterdarstellung** kann geschrieben werden:

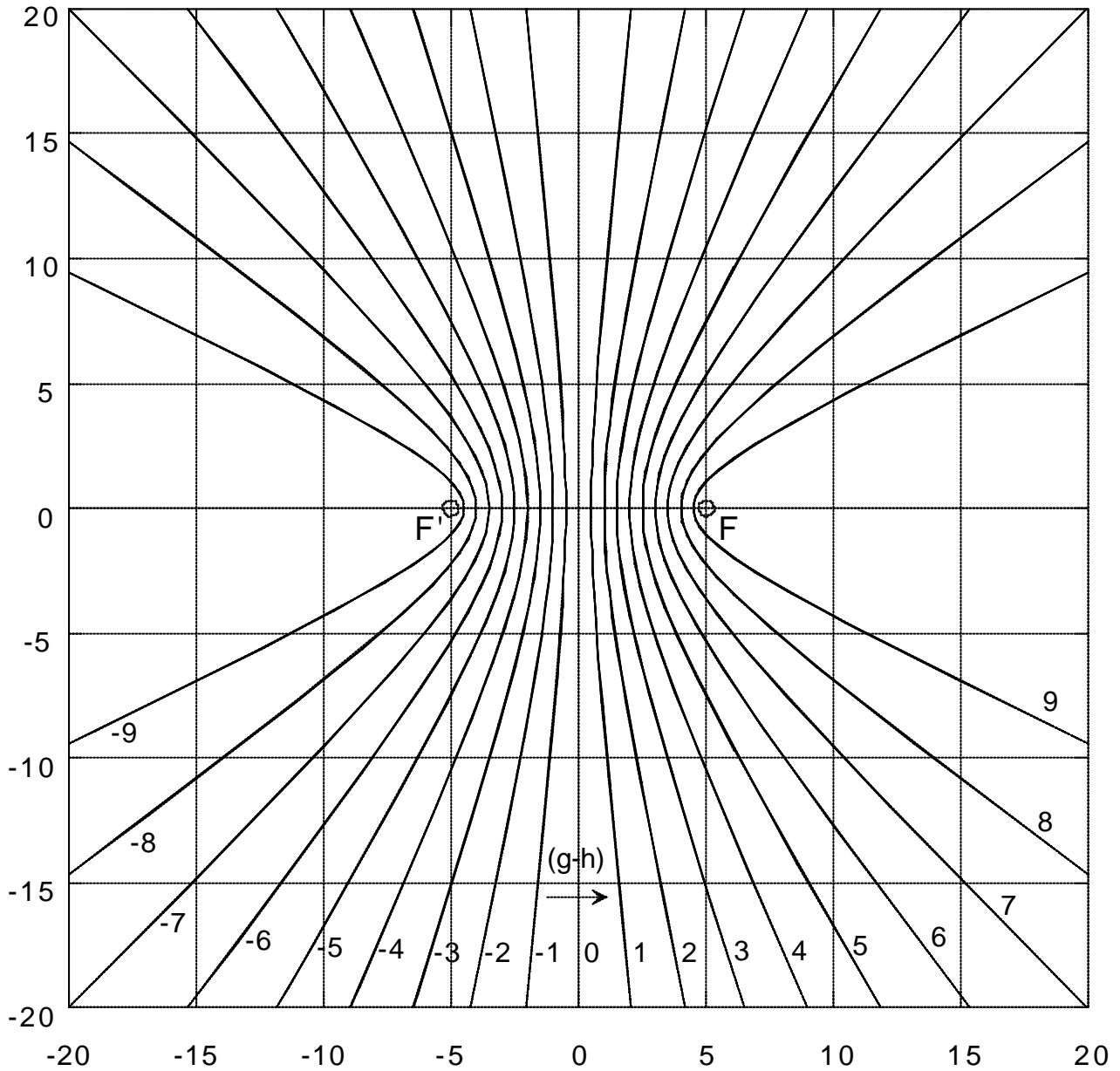
$$x = a/\cos t, \quad y = b \tan t$$

Somit eignet sich die Hyperbel zur Beschreibung von Codereferenz in der Ebene, wenn angenommen wird, daß sich zwei Signale *radial von den Brennpunkten her* ausbreiten. Ein einzelner Hyperbelast charakterisiert eine *feste Zeitdifferenz zweier*, über die Brennpunkte  $F, F'$  eingespeister *Impulse*. Die durch einen Hyperbelast referenzierte Verzögerungszeit  $\tau$  beider Impulse zueinander beträgt bei der konstant angenommenen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$

$$\tau = 2a/v$$



Hyperbelschar-Diagramm:  $2e=10$ ,  $.5 < a < 4.5$

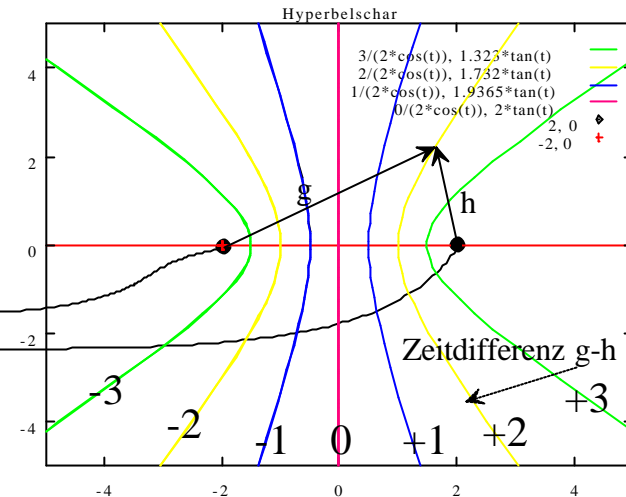
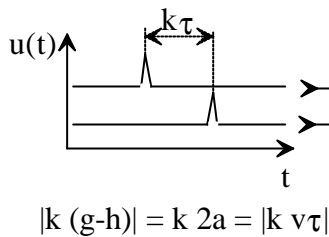


Parametrische Darstellung:  
 Brennpunkt Abstand  $2e=10$ :  $e=5$   
 $b=\sqrt{e^2-a^2}$ ,  $a=(.5(.5)4.5)$   
 $\text{plot } a/\cos(t), \sqrt{e^2-a^2}*\tan(t)$

Isodistante Hyperbelschar.

Jede Hyperbel ist charakterisiert durch die Laufzeitdifferenz  $|g-h| = 2a$  zwischen den Strecken  $PF$  und  $PF'$  (Abstand  $FF' = 2e = 10$ ).

Codereferenz für  $k$ -Vielfache  
 von  $\tau$  ( $e = 2$ )  
 $k \cdot 2a = k \cdot v \tau = (3, 2, 1, 0, -1, -2, -3)$   
 (Simulation)



Die Hyperbel weist somit den in einer Ebene  $(x,y)$  liegenden Punkten (Neuronen) in Bezug auf die Brennpunkte  $F, F'$  eine Funktion zu. Je nach ihrer Lage in Bezug auf den referenzierenden Hyperbelast sind die Punkte mehr oder weniger selektiv in Bezug auf den vorgegebenen Impulsabstand. Das vorn entwickelte Beugungsschema besitzt hyperbolischen Charakter, wo radiale Ausbreitung zutrifft.

Man kann den Sachverhalt durch Umkehrung verschärfen: Wenn die Hyperbel im radialen Laufzeitraum der Ebene Ort einer definierten Laufzeitdifferenz ist, ist andererseits die einzig mögliche Lösung für einen definierten Laufzeitunterschied des betrachteten Impulspaars die zugeordnete Hyperbel. Bei der örtlichen Lösung von Interferenzaufgaben kann diese Aussage nützlich sein, da sie eine Negativbestätigung für eine Annahme liefert. Entweder die Lösung liegt auf der gesuchten Hyperbel, oder es existiert keine (triviale) Lösung.

Im Beispiel dargestellt sind die Hyperbeln maximaler Interferenz für Vielfache von  $|2a| = v\tau$ . Es ist zu beachten, daß durch die Hyperbelfunktion rechts- und linksseitige Äste nicht unterschieden werden können, es treten stets beide Äste auf,  $x^2 = +x \cdot +x = -x \cdot -x$ .

Somit gilt z.B. in der **Parameterform**

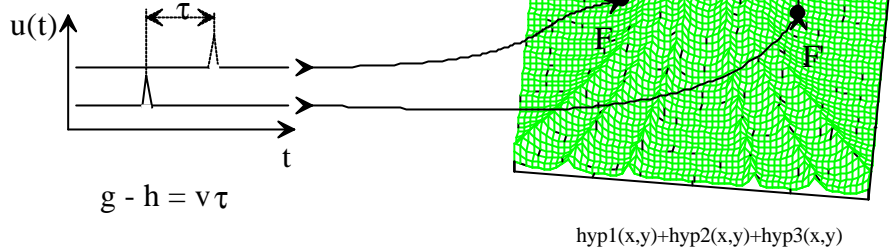
$$\{+a/\cos t, b \tan t\} = \{-a/\cos t, b \tan t\}$$

Zur Generierung der Hyperbelschar kann die parametrische Form angewandt werden, siehe Diagrammdarstellung.

Bei Modellierungen von Interferenzproblemen macht sich das in den Quadranten der Hyperbel verschwindende Vorzeichen oft nachteilig bemerkbar. Dadurch ist es nicht möglich, zwischen links- und rechtsseitigem Hyperbelast zu unterscheiden, denen ja im Interferenzfall genau die entgegengesetzte Korrelation von Impulsen zugeordnet ist. Eine Lösung des Problems kann darin bestehen, anstelle der Quadratur eine Betragsfunktion zu benutzen, z.B. in der Form  $x^2 \leftrightarrow x \cdot \text{abs}(x) = x \cdot \text{sqrt}(x^2)$ .

Ist die geometrische Impulslänge klein gegen den Abstand zweier Quellen  $FF'$ , und breiten sich die aus diesen Quellen stammenden Impulse zirkulär in angenommen stochastisch dicht und isotrop verkabelten Gebieten aus, so tritt *Interferenz* entsprechend der Laufzeitdifferenz beider Impulse *nur an ganz definierten Orten* auf. Im Bild dargestellt sind die Hyperbeln von sechs unterschiedlichen Impulsabständen. Folglich ist eine Annahme eines universell lernfähigen Raumes oder Gebietes unter diesen Umständen nicht gegeben. Entsprechend des Abstandes der Impulse ist nur das Gebiet potentiell erregbar (also lernfähig), das durch den entsprechenden Hyperbelast ausgezeichnet ist.

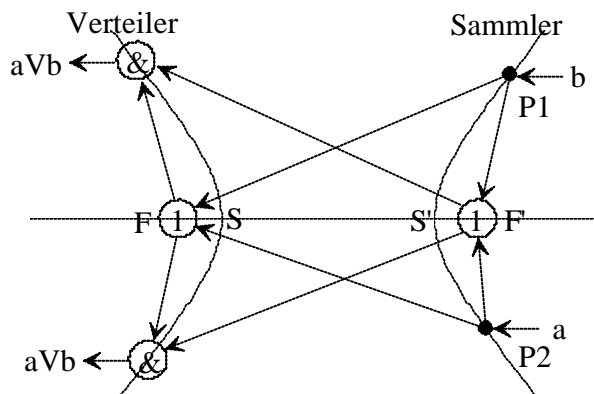
Radiale Interferenz zweier Quellen  $F, F'$ .  
 Verschiedene Hyperbeln referenzieren  
 verschiedene Impulsabstände.



### Hyperbolische Umkehrung

Von einem Ast der Hyperbel zweistrahlig durch die Brennpunktbereiche verlaufende Leitbahnen bilden jeden beliebigen, zu einem Hyperbelast gehörenden Punkt auf jeden beliebigen, zum anderen Hyperbelast gehörenden Punkt ab.

Alle in Punkten eines Hyperbelastes gesammelten (ankommenden) Impulse oder Impulsgruppierungen sind nach ihrer Weiterleitung zu den Brennpunkten vorlagenfrei, ihre Pulsdifferenz beträgt einheitlich  $2a$ , ihre Abstammung von einer speziellen Vorlage ist nicht mehr nachzuweisen.



Alle über einen beliebigen Punkt auf dem anderen Hyperbelast abgenommenen Signale  $aVb$  enthalten summarisch alle auf dem ersten Ast einlaufenden Impulse oder Impulsgruppen. In den Brennpunkten liegen Sammler mit ODER- Charakteristik. Der Zeitbezug der von den OR- Gattern in den Brennpunkten aufgenommenen Signale ist abhängig von der Entfernung des Hyperbelpunktes vom Brennpunkt. Auf verschiedenen Punkten der Hyperbel liegende Signalquellen differieren im Zeitbezug. An verschiedenen Punkten der Verteilerhyperbel abgegriffenen Signale enthalten zwar dieselben Impulsgruppen, jedoch ist ihr Absolutzeitbezug verschieden.

## Parabolische Abbildung

Die Parabel ist der Ort aller Punkte, die von einem festen Brennpunkt  $F$  und einer festen Leitlinie  $g$  je denselben Abstand  $r$  haben, im Bild

$$r = r.$$

Eine **Fadenkonstruktion**<sup>351</sup> der Parabel zeigt eine weitere Eigenschaft auf.

Die Parabel ist auch der Ort aller Punkte einer Ebene, für die die *Summe* der Abstände ( $r + a$ ) von einem Brennpunkt  $F$  und von einer öffnungsseitig liegenden Parallelen  $q$  zur Leitlinie  $g$  konstant ist.

$$a + r = \text{const} = x_0 + \frac{p}{2}$$

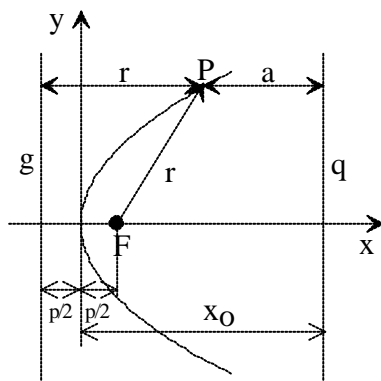
Für die dargestellte Lage im Koordinatensystem hat die Parabel die **Scheitelfgleichung**

$$y^2 = 2px \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{y^2}{2p}$$

mit einem **Brennpunkt**  $F$  in  $x = p/2$ . Der Schnittpunkt der Leitlinie  $g$  mit der  $x$ - Achse liegt bei  $x = -p/2$ . Der **Scheitelpunkt** selbst liegt im Ursprung d.K.. Der Abstand  $r$  wird mit dem *Satz des Pythagoras* bestimmt.

$$r = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

Eine im Brennpunkt der Parabel erzeugte konzentrische Impulsfront  $W'$  erreicht exakt *gleichzeitig* die Gerade  $q$ . Die Lage der Geraden ist, sofern das Parabelgebiet selbst gemieden wird, nicht gleichgültig. Sie liegt in Richtung der Öffnung der Parabel, wenn eine lineare Wellenfront  $W$  aus dem unendlichen auf eine konzentrisch um den Brennpunkt  $F$  liegende Wellenfront  $W'$  abgebildet werden soll. Eine Häufung von Leitungen macht den Paraxialraum der Optik für elektrische Netzwerke wenig brauchbar. Da keine Linsen zu schleifen sind, ist er für elektrische Netzwerke ohnehin unnützlich. Die Parabel ist für *elektrische Impuls- Netzwerke* ein Ersatz für Aufgaben, die in der Optik durch Linsen erfüllt werden. Und sie ist ein Ersatz, der Eigenschaften aufweist, die denen von optischen Linsen weit überlegen sind.

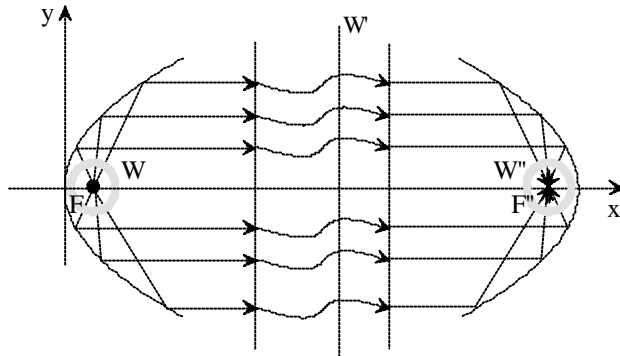


Je nach Wahl der Größe eines Parabelsegments können mehr oder weniger starke Bündelungen erreicht werden. Öffnungswinkel von über  $180^\circ$  sind gangbar. Die Parabel kann als Linse angesehen werden, deren eine Seite eine unendlich entfernte Schnittweite und deren andere Seite eine Schnittweite auf den Brennpunkt der Parabel besitzt. Somit läßt sich mit geringem Rechenaufwand eine Linse verschiedener Objekt- und Bild- Schnittweiten durch Zusammensetzung zweier Parabelsegmente erreichen. Gegenüber der optischen Linse hat diese Anordnung den Vorzug, daß zwischen die Parabelsegmente lange Verbindungsleitungen geschaltet werden können. Der Bildraum

<sup>351</sup> Gellert, W. u.a.: Kleine Enzyklopädie Mathematik. Bibliograph. Institut Leipzig, 1977.

bleibt auf die Region um den Brennpunkt begrenzt. Die Bildebene ist aus mehreren, in  $y$ - Richtung verschobenen Parabelsegmenten gestaltbar.

Damit nicht genug. Die beträchtliche Größe des Öffnungswinkels gestattet Aufnahmen, die seitlich um das Objekt 'herumschauen'. Dazu stelle man sich das Objekt im Brennpunkt der Parabel stehend vor, mit Sicht zur geschlossenen Seite der Parabel. Im Gegensatz zur optischen Abbildung, bei der wir die Holografie benötigen, um dreidimensionale Bilder mit Linsen zu schaffen, schafft die Parabel eine dreidimensionale Darstellung auch ohne Holografie, übrigens unabhängig von der Nutzung periodischer oder pulsformiger Wellen. Nur, der Kameramann kann eine zu filmende Landschaft nicht in einer Parabel unterbringen.



Setzen wir ein paraboloides Modell zur Speicherung von Abbildungen im Pallium voraus, würde dies erklären, warum wir einen Gegenstand vor unserem geistigen Auge bis zu einem bestimmten Grad in einem Zuge drehen können. Dieser Bereich ist der 'im Paraboloid gefilmte' Drehbereich, der in abgespeicherter Form zur Verfügung steht. Ist das Objekt darüber hinaus zu drehen, benötigt man Zeit zum Nachladen bzw. suchen eines neuen Bildes. Sicherlich wäre dies auch eine mögliche Erklärung dafür, wenn ein Körper von mehreren Seiten zu betrachten ist, ehe unser Informationsbedarf gestillt ist. Auch dafür, daß uns der zweidimensionale Papierbogen in der Schule so trocken erscheint. Die zu speichernde Abbildung soll aus irgend einem Grund vollständig sein, die zu speichernde paraboloiden Abbildung harmoniert mit der von den Augen kommenden optischen, flächenhaften so schlecht, daß die Hände zuhelfe genommen werden müssen, um eine interne, Paraboloid- artige Abbildung zu vervollständigen.

## Kombinationskörper

Unter Hinzunahme einer auf der  $x$ - und  $y$ - Achse senkrecht stehenden  $z$ - Achse lassen sich Gleichungen für dreidimensionale Gebilde angeben, die Geometrien mit kombinierten Eigenschaften der Grundformen darstellen.

**Rotationsparaboloid**  $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} - 2z = 0$

**Elliptisches Paraboloid**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$

**Hyperbolisches Paraboloid**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$

Diese Flächen sind von Bedeutung, wenn es darum geht, Eigenschaften vorteilhaft zu kombinieren. So wäre es zB. mit dem elliptischen Paraboloid möglich, eine parabolische Abbildung auf

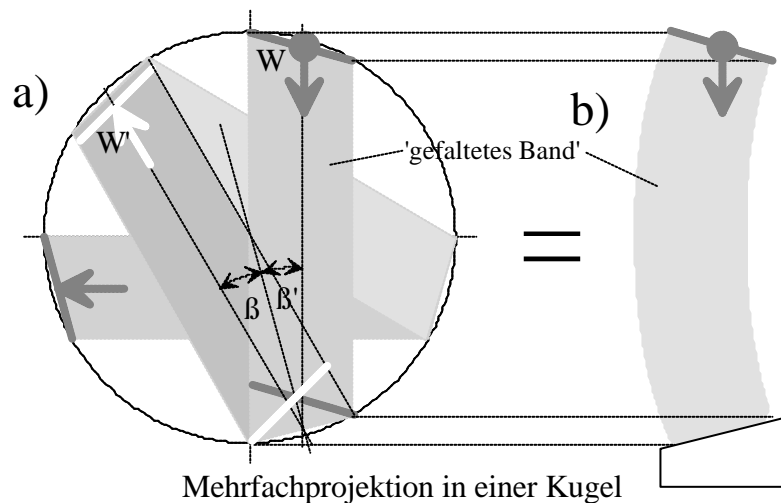
holografischem Wege (Symmetrieeigenschaft der Ellipsen- Brennpunkte für Synchronisation erforderlich) darzustellen. Wie im Abschnitt *Impulsholografie* diskutiert, läßt sich mit der impulsholografischen Abbildung eine Form der Aufmerksamkeitssteuerung realisieren. Mit einer derartigen Struktur kann ein Bild aufgenommen, und gleichzeitig als Impulshogramm gespeichert werden.

Das hyperbolische Paraboloid "Sattelfläche", wie auch zylindrisches Ellipsoid und zylindrisches Paraboloid sind mit Scharen gerader Linien (gespannter Fäden) als sog. Regelflächen konstruierbar.

## Kugel- Projektion

Eine Reflexion einer vom Kugelmantel kommenden Welle  $W$ , deren Mittelstrahl unsymmetrisch zum Zentrum einer Kugel verläuft, und die zentralsymmetrisch zum Mittelpunkt der Kugel gespiegelt wird  $\beta = \beta'$ , erzeugt eine symmetrisch gespiegelte Wellenfront  $W'$ , die sich ebenfalls wieder an den Kugelmantel anschmiegt.

Es läßt sich zeigen, daß mit einem gefalteten Band diese abbildende Eigenschaft modelliert werden kann. Dazu ist das Band so zu falten, daß die Knicklinien die Ausrichtungen der spiegelnden Flächen treffen. Die Bandfaltung läßt sich für die Beschreibung von Mehrfachprojektionen in beliebig geformten Körpern nutzen. Letztlich kommt es, unabhängig von der der Art der Reflexion, darauf an, daß die Länge aller Leitbahnen zwischen Vorlage und Abbild auch bei mehrfacher Reflexion identisch ist. Wird ein gefaltetes Bandmodell mit einer netzartigen Struktur gewählt, ist es möglich, Hindernisse sanft zu umfahren, ohne das sich die Ausrichtung der Wellenfront verändert, (siehe *b*).

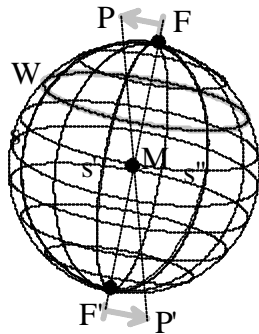


## Oberflächen- Projektion

Auf der Suche nach Interferenzen, für die ein Potentialfeld angebar ist, die sich also der Behandlung mit Methoden der Potentialtheorie oder der Differentialgeometrie nur bedingt widersetzen, begegnen wir den sphärischen Flächen.

## Projektion auf der Kugeloberfläche

Zwischen den Polen sind alle kürzesten Wege entlang eines Weges auf der Hülle gleich lang. Folglich kann eine Interferenz entlang Leitbahnen, die auf der Oberfläche zwischen zwei Polen verlaufen, jeweils nur auf dem gegenüberliegenden Pol der Kugel auftreten.



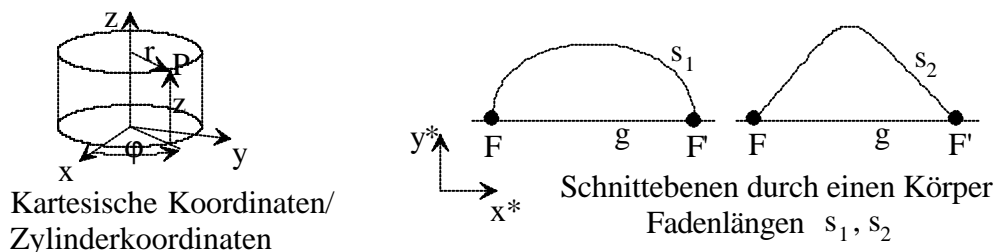
Hülleninterferenz auf der Kugeloberfläche

Die Pole  $F, F'$  sind auf allen kürzesten Wegen  $s, s', s', s''$  gleichweit entfernt.

Die Verbindungsgeraden zwischen allen, in Interferenz stehenden Punkten  $F, F'$  sowie  $P, P'$  gehen durch den Mittelpunkt  $M$  der Kugel. Auf der Bildseite erscheint eine Abbildung in Analogie zur Abbildung einer optischen Konvexlinse spiegelverkehrt. Die Wellenfront  $W$  einer Impulswelle von  $F$  zu  $F'$  breitet sich in konzentrischen Ringen von einem Pol zum anderen aus. Die Kugelhülle liefert eine längentreue, aber spiegelverkehrte Abbildung zwischen Vorlage und Bild.

## Abbildung auf beliebig gekrümmten Flächen (Fadenkonstruktion)

Voraussetzung für das Zustandekommen einer Abbildung zwischen zwei Gebieten  $G, G'$  (Vorlageebene und Bildebene) ist die Interferenz aller Punkte  $P, P'$  beider Gebiete, wobei innerhalb von  $G$  (bzw.  $G'$ ) kein Punkt  $P$  (bzw.  $P'$ ) existieren darf, der keinen konjugierten Punkt  $P'$  (bzw.  $P$ ) besitzt. Vereinfachend ist die Kurvenlänge  $s_i$  entlang aller betrachteten Wege zwischen  $F$  und  $F'$  dann gleich zu wählen, wenn als Interferenzgebiet  $G$  bzw.  $G'$  ein Gebiet hinreichend kleiner Ausdehnung um  $F$  bzw.  $F'$  angenommen wird. Sind  $F$  und  $F'$  als Punkte von Schnittebenen  $e_i$  angebbbar, deren Bestandteil die betrachteten, auf der Hülle liegenden Leitbahnen zwischen  $F$  und  $F'$  sind, so ist ein hinreichendes Kriterium für Interferenz, daß die Kurvenlänge  $s_i$  (Fadenlänge) aller so bestimmten Leitbahnen gleich groß ist. Schnittebene und Hüllkurve stehen bei dieser Konstruktion nicht notwendig senkrecht aufeinander. Auch können die Schnittebenen  $e_i$  gekrümmt sein.



Kartesische Koordinaten/  
Zylinderkoordinaten

Schnittebenen durch einen Körper  
Fadenlängen  $s_1, s_2$

Zur Beschreibung rotationssymmetrischer Hüllen bieten sich Zylinderkoordinaten an (Bild). Werden die aufeinander abzubildenden Pole  $F, F'$  auf die  $z$ - Achse gelegt, ist es möglich, die interessierenden Schnittflächen um die  $z$ - Achse zu drehen. Die Schnittebenen können, da  $j$  i.a. nicht zur Bestimmung der Schnittebenen erforderlich ist, in ein  $y^* = f(x^*)$  Koordinatensystem transformiert werden:

$$y^* = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^* = z$$

Je nachdem, ob die zu bestimmenden Kurven in Funktionsform  $y = f(x)$  oder in Parameterdarstellung  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$  gegeben sind, ist die Kurvenlänge zwischen zwei Punkten  $(x_a, y_a)$ ,  $(x_b, y_b)$  bzw.  $(t_a, t_b)$  in einer zweidimensionalen Schnittebene  $x, y$  zu

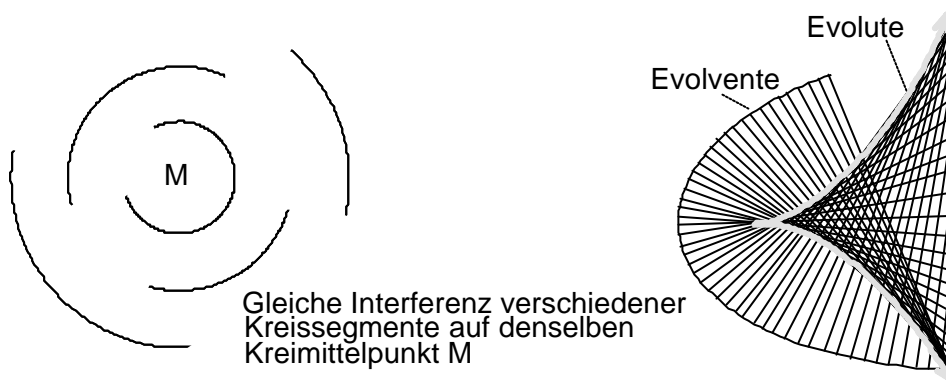
$$s_i = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$s_0 = s_1 = \dots = s_i$$

bestimmt, wobei ausnahmslos alle, die Leitbahnen repräsentierenden Kurvenlängen  $s_i$  gleich lang zu sein haben (Fadenkonstruktion), wenn Interferenz eintreten soll.

## Evolute und Evolvente

Die Evolute einer ebenen Kurve ist der geometrische Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte<sup>361</sup>. Andererseits ist die Evolvente der Ort der Schnittpunkte der Tangenten an eine Kurve. Evolute und Evolvente bedingen sich. Die Evolvente einer Evolute ist die Kurve selbst.



In einem homogen mit Leitbahnen durchsetzten Medium ist der Krümmungsmittelpunkt einer Kurve, sofern gleiche Laufgeschwindigkeiten vorausgesetzt werden, der Ort maximaler Interferenz. Eine Interferenz am Krümmungsmittelpunkt zeigt einen Kurventeil definierter Krümmung an. Sie zeigt hingegen nicht an, in welchem Abstand und unter welchem Raumwinkel der verursachende Kurventeil liegt. Auch bleibt die Geometrie des Kurventeils im Detail ungewiß. So ist die Evolute einer Ellipse eine Astroide, die Evolute eines Kreises ist dessen Mittelpunkt. Unter dem Aspekt der Interferenz bei gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit erzeugt die Evolvente eine vom kleinsten zum größten Krümmungsradius fliehende Abbildung auf der Evolute, die invers zum wachsenden Krümmungsradius schwächer wird.

## Konforme Abbildung, Existenzsatz

Interferenzen stellen einen Sonderfall konformer Abbildungen dar. Eine analytische Funktion

$$w = f(z) = u(x, y) + j v(x, y)$$

<sup>361</sup> Gellert, W. u.a.: Kleine Enzyklopädie Mathematik. 2. Aufl., Bibl. Institut Leipzig, 1967



vermittele eine Abbildung zwischen einer (komplexen)  $w$ - und einer  $z$ - Ebene.

Werden genügend nahe beieinander gelegene Punkte  $z_0, z_1, \dots, z_i$  durch  $w = f(z)$  auf die Punkte  $w_0 = f(z_0), w_1 = f(z_1), \dots, w_i = f(z_i)$

abgebildet, so gehen die Differenzen der Strecken  $\Delta z_i = z_i - z_0$  in  $\Delta w_i = w_i - w_0$  über. Das Verhältnis

$$\Delta w / \Delta z = f'(z_0) + \varepsilon$$

stellt den Abbildungsmodul dar, es ist bis auf die Konstante  $\varepsilon$  von der Ableitung  $f'(z_0)$  im  $z$ - Gebiet verschieden. Für die ideale Interferenzabbildung ist  $\varepsilon = 0$  zu fordern, da Signallaufzeiten in der  $w$ - Ebene identisch zu denen der  $z$ - Ebene sein sollen. Für reale Interferenzabbildungen kann  $\varepsilon$  in einem bestimmten Verhältnis zu Signalparametern, zB. zur Dispersion des Signals stehen. Für genügend kleine  $\varepsilon$  vermittelt  $w$  eine konforme, dh. winkeltreue Abbildung.

Der **Riemannsche Abbildungssatz**<sup>371</sup> besagt, daß stets eine analytische Funktion existiert, die eine Kontur in der  $z$ - Ebene eineindeutig und konform auf das Innen- oder Außengebiet eines Einheitskreises in der  $w$ - Ebene abbildet. Die gesuchte Funktion ist vom Typ

$$w = z + a_1/z + a_2/z^2 + \dots$$

Sie kann zB. die nötige Leitbahnverlegung zwischen zwei in Interferenz zu bringende Konturen darstellen.

Kann eine Funktion  $w$  in eine Reihe entwickelt werden, so gibt die Stelle des Abbruchs der Reihenentwicklung die Güte der Näherung  $\varepsilon \rightarrow 0$  an.

Im Aufsatz behandelte Interferenzabbildungen stellen zumeist Spezialfälle konformer Abbildungen dar. Insbesondere besitzen die winkel- und längenkonformen Abbildungen, dh. elliptische, hyperbolische, parabolische etc. Abbildungen besondere Bedeutung für Interferenzsysteme. Für diese gilt tatsächlich  $\varepsilon = 0$ . Hingegen stellen die ebenfalls besprochenen, aus der Optik geläufigen Paraxial- Näherungen stets Näherungen dar, für die  $\varepsilon$  gegen Null konvergiert.

In die Biologie übersetzt, verdeutlicht der Riemannsche Abbildungssatz die Möglichkeit, Verlegungen für Nervenstränge angeben zu können, die eine Abbildung zB. der Kontur der Innenfläche der Haut oder die Kontur des Gyrus postcentralis bei konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit der Signale auf einen Kreis abbildet. Zwei in Kette liegende Abbildungen können folglich zwei beliebig gestaltete Konturen über den Zwischenschritt der Kreiskontur ineinander transformieren; sie in Interferenz bringen.

<sup>371</sup> Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. 20. Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1981