

Analytische Hilfsmittel

Um Interferenzorte eines komplexen, biologischen Objekts charakterisieren zu können, ist es nötig, formalisierte Methoden zu suchen, die auf numerischem Wege ausgehend von geometrischen Repräsentationen die entsprechenden Interferenzgebiete charakterisieren. Ziel kann z.B. eine Ermittlung von gleichzeitigen Auswirkungen zB. der Verletzung eines nervalen Areals auf verschiedene Dermatome, Myotope oder Organotope sein.

In Analogie zur Analyse elektrischer Stromkreise ist es möglich, Algorithmen zu entwickeln, die eine formale Ermittlung von Interferenzorten gestatten.

Elemente

Zeitfunktion $f(t)$

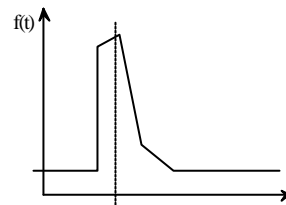
Eine Zeitfunktion $f(t)$ möge sich auf einen Zeitbezug t_0 beziehen $f(t-t_0)$.

Sie möge stückweise stetig und zusammenhängend sein.

Es soll vorausgesetzt werden, daß eine inverse

Funktion $1/f(t-t_0)$ ohne Extrema ist und daß allen

Ordinatenwerten mindestens ein Abszissenwert zugeordnet werden kann.



Delay- Element

Ein Verzögerungselement möge definiertes Delay besitzen.

Es möge eingangs- wie ausgangsseitig rückwirkungsfrei sein.

Passierende Zeitfunktionen mögen dieselbe Verzögerungszeit

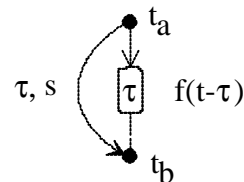
$$t = t_b - t_a = (s_b - s_a) / v$$

erfahren, eine beliebige Zeitfunktion $f(t)$ wird um t verschoben.

$$f(t - \tau) = f(t - \frac{s}{v})$$

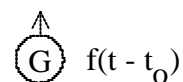
Ein Pfeil kennzeichnet die Ausbreitungsrichtung der Zeitfunktionen.

Ein Funktionswert $f(t)$ wird mit derselben Verzögerungszeit t zur jeweils anderen Seite übertragen.



Generator

Ein Generatorelement möge zu einem bestimmten



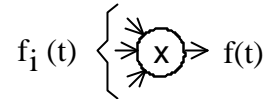
Zeitpunkt t eine Zeitfunktion $f(t-t_0)$ generieren.

Funktionator

Es möge ein Funktionselement zur Verfügung stehen, daß eine beliebige Funktion \otimes besitzt, die es gestattet, zeitinvariant die Funktionswerte aller einkommenden Zeitfunktionen $f_i(t_j)$ zu einem Zeitpunkt t miteinander zu verknüpfen.

$$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) \otimes f_3(t) \otimes \dots \otimes f_n(t)$$

In Abhängigkeit vom Zeitfunktionstyp kommen zeitinvariante Operationen, wie Addition, Multiplikation, Minimum, Maximum, selbstreproduzierende Funktionen etc. in Betracht.



Laufzeitdiagramm

Zur anschaulichen Verdeutlichung von Interferenzen, die auf eindimensionale Abbildungen reduziert werden können, ist ein Laufzeitdiagramm der Form $x = f(t)$ geeignet.

Im Diagramm wird das Fortschreiten von Impulsfronten dargestellt. Von x_0 ausgehend bewegen sich entgegengesetzt zueinander die Impulse i und j . Die Bewegungsgeschwindigkeit eines beliebigen Impulses $v = dx/dt$ ist identisch dem Anstieg dy/dx im Diagramm bzw. dem Tangens des Schnittes mit der Zeitachse t .

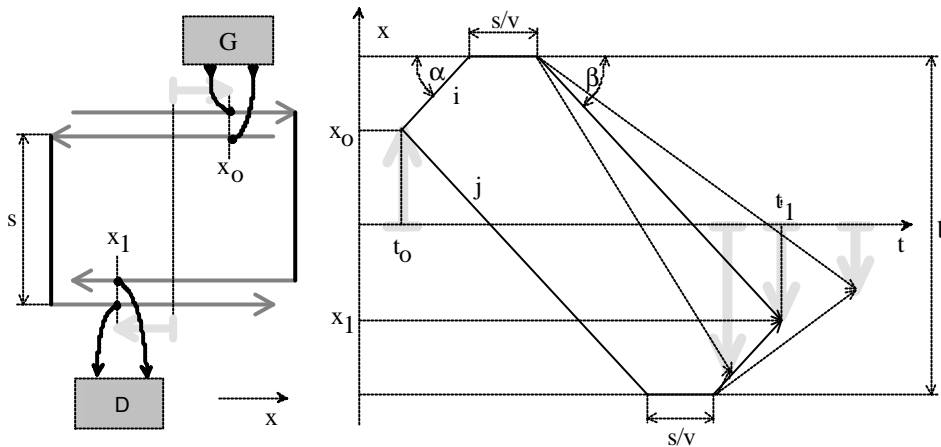
$$v_1 = \frac{dx}{dt} = \tan \alpha$$

Während der Zeit der Ausbreitung auf der Verbindungsleitbahn (Abschnitt der Länge s) kommt kein x -Zuwachs zustande. Auf der gegenüberliegenden Seite wandern die Impulse aufeinander zu.

$$v_2 = \frac{-dx}{dt} = \tan \beta$$

Das Verhältnis der Bildgrößen x_i/x_0 ist für unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten auf der Empfangsseite mit grauen Pfeilen dargestellt. Unter der Voraussetzung, daß verschiedene Signale zwischen Sender und Empfänger dieselbe Zeit bis zur Wiederbegegnung benötigen, sind die von den Impulsen durchlaufenen Streckenanteile in x -Richtung aus der Summe der $v t$ -Produkte bestimmbar, wobei jedes $v = dx/dt$ vorzeichenbehaftet ist.

$$\sum_i \frac{x_i}{v_i} = \sum_j \frac{x_j}{v_j} = \dots = \sum_n \frac{x_n}{v_n} = t_1 - t_0 = \Delta t$$



Das Bildverhältnis M zweier Impulse x_1/x_0 stellt sich als Summe der in Achsenrichtung x durchlaufenen Streckenteile dar.

$$\frac{\sum_i v_i t_i}{\sum_j v_j t_j} = \frac{x_i}{x_j} = \frac{A_i}{A_j} = M$$

Maschenanalyse

Interferenz tritt in einer Masche auf, wenn die Summe der Laufzeiten vom Sender zum Empfänger gleich groß ist, dh. wenn in Umlaufrichtung der Masche gezählt die Verzögerungszeit zu null wird. Sind 'weiche' Interferenzen zu ermitteln, sind zusätzlich die Zeitfunktionen zu betrachten.

Beispiel

Mit einer Maschenanalyse ist die Interferenz zwischen zwei Sendern $G1$ und $G2$ sowie zwei Empfängern $E1$ und $E2$ zu überprüfen.

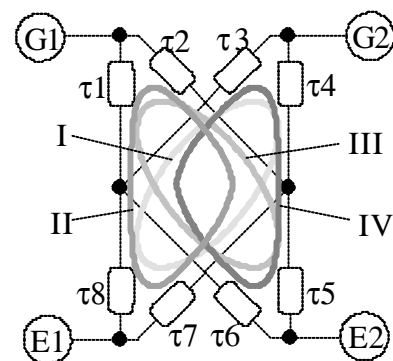
Die Maschen I, II, III, IV werden entgegen zur Uhrzeigerichtung gezählt. Ein positives Vorzeichen erscheint in der Maschengleichung, wenn Maschenrichtung und Signalfluß gleichgerichtet sind, ein Minuszeichen, wenn sie zueinander entgegengerichtet sind.

- I) $t3 + t8 - t7 - t4 = T1$
- II) $t1 + t8 - t7 - t2 = T2$
- III) $t1 + t6 - t5 - t2 = T3$
- IV) $t3 + t6 - t5 - t4 = T4$

Interferenz herrscht in einer Masche, wenn für die betreffende Maschensumme $T_i = 0$ gilt.

Als einfache Nebenbedingungen mögen gelten:

- 1) $t1 = t5 = 3t;$
- 2) $t2 = t6 = 4t;$
- 3) $t3 = t7 = 5t;$



$$4) \quad t_4 = t_8 = t.$$

Zu ermitteln sind Interferenzorte und Verzögerungszeiten.

Die Nebenbedingungen in die Maschengleichungen eingesetzt folgt sofort $T_1 = T_3 = 0$. Folglich herrscht in diesen Maschen Interferenz. Der Empfänger E_1 empfängt von G_2 nach $6t$, E_2 empfängt von G_1 nach $7t$ die Interferenz.

Die Maschenumlaufzeiten $T_2 = -5t$ bzw. $T_4 = 5t$ sind durch geschickte Wahl der Werte verschieden von Null, Interferenz ist ausgeschlossen. Der Generator G_1 besitzt im informationstechnischen Sinne eine Verbindung zum Empfänger E_2 , umgekehrt ist der Generator G_2 mit E_1 verbunden.

Durch Variation der Nebenbedingungen lassen sich ebenso andere Konstrukte finden, mit

$$1) \quad t_1 = t_3 = t_5 = t;$$

$$2) \quad t_2 = t_4 = t_6 = 2t;$$

$$3) \quad t_7 = t_8 = t;$$

senden beide Generatoren G_1 , G_2 auf nur einen Empfänger E_2 , mit

$$1) \quad t_1 = t_7 = 3t;$$

$$2) \quad t_2 = t_8 = 4t;$$

$$3) \quad t_3 = t_5 = 5t;$$

$$4) \quad t_4 = t_6 = t.$$

sendet G_1 zu E_1 und G_2 auf E_2 etc.

Es ist zu erkennen, daß allein durch die Wahl der Verzögerungszeiten die informationstechnische ('logische') Verschaltung dieses kleinen Netzwerkes gesteuert wird.

Pfadanalyse

Für größere Netzwerke, insbesondere für solche mit mehr als zwei Eingängen pro Empfänger, wird die Maschenanalyse zu aufwendig. Einfacher ist dann die Notierung von Pfaden so, daß alle Verzögerungselemente eines Pfades in Kette liegen. Jeder Pfad beginnt an einem Generator und endet bei einem Empfänger, wobei zunächst ungeordnet alle möglichen Pfade bestimmt werden. Ein Pfad besteht aus den Verzögerungszeiten t_k, t_{k+1}, \dots, t_m der kettengeschalteten Elemente.

$$P_{ij} = t_k + t_{k+1} + t_{k+2} + \dots + t_m$$

Notwendige Bedingung für Interferenz zwischen Generator und Empfänger ist gleiche Laufzeit aller einem Generator- Empfänger- Paar zuordenbaren Pfade. Die Indizierung eines Pfades $P_{i,j,k}$ geschieht zweckmäßig so, daß Generatorindex i und Empfängerindex j im Pfadindex verankert werden. Eine Ordnungszahl k im Index dient der Unterscheidbarkeit aller Pfade, die demselben Paar zugeordnet sind.

Eine interferenzielle Abbildung entsteht zwischen Sender i und Empfänger j für alle Pfade

$$P_{i,j,1} = P_{i,j,2} = P_{i,j,3} = \dots = P_{i,j,n}$$

wenn n die Anzahl der Eingänge (Synapsen) des Empfängers j darstellt.

Beispiel

Für das Beispiel vom vorigen Abschnitt lassen sich folgende Pfade angeben. Die Verzögerungswerte wurden für den Fall der Informationskreuzung $G1$, $E2$ und $G2$, $E1$ eingesetzt.

Pfade 1,1

$$P_{1,1,1} = t_1 + \tau_8 = 4\tau$$

$$P_{1,1,2} = t_2 + \tau_7 = 9\tau$$

Pfade 1,2

$$P_{1,2,1} = t_1 + \tau_6 = 7\tau$$

$$P_{1,2,2} = t_2 + \tau_5 = 7\tau$$

Pfade 2,1

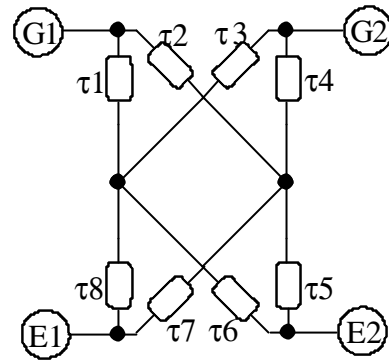
$$P_{2,1,1} = t_3 + \tau_8 = 6\tau$$

$$P_{2,1,2} = t_4 + \tau_7 = 6\tau$$

Pfade 2,2

$$P_{2,2,1} = t_3 + \tau_6 = 9\tau$$

$$P_{2,2,2} = t_4 + \tau_5 = 4\tau$$

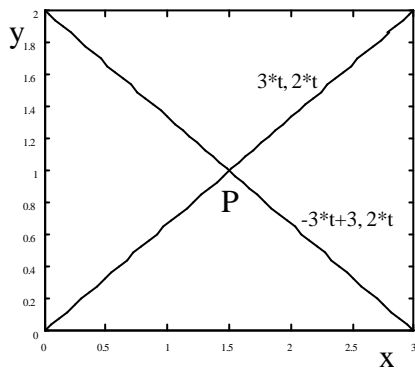


Es ist $P_{1,2,1} = P_{1,2,2}$ sowie $P_{2,1,1} = P_{2,1,2}$ abzulesen. Da alle Eingänge der Empfänger versorgt sind, stehen die Pfade $(i, j) = (1, 2)$ bzw. $(i, j) = (2, 1)$ in Interferenzbeziehung zueinander.

Im Nachgang können jetzt die verschobenen Zeitfunktionen $f(t-t)$ eingesetzt werden, um die Qualität der Interferenz im Empfänger zu überprüfen. So ergeben sich unter Verwendung breiter Impulse ($10t$) beträchtliche Interferenzen auch für die laut Pfadanalyse nicht interferierenden Pfade, während kurze Impulsbreiten (t) keine Verfälschung der Ergebnisse mit sich bringen.

Angepaßte Koordinatensysteme

Vergleichbar zum Ort einer Interferenz gibt eine parametrische Darstellung einer Funktion in der Form $x=x(t)$, $y=y(t)$ als Ergebnis im übertragenden Sinne interferierende Punkte aus. Die Diagonale $x=3t$, $y=2t$ zB. ist als *Burst* (siehe dort) interpretierbar, wobei die Koeffizienten die Leitbahngeschwindigkeiten darstellen. Problematisch wird die Einbeziehung weiterer Interferenzquellen. Werden zusätzlich einschränkende Bedingungen zB. in der Form $x=-3t+3$, $y=2t$ hinzugefügt, wird nicht etwa die Vielfalt der Lösungen reduziert. Es entsteht vielmehr zusätzlich eine schneidende Gerade. Die Erfahrung lehrt uns, daß i.a. der Schnittpunkt zwischen beiden Geraden die Lösungsmenge darstellt. Im Interferenzfall wäre ebendieser Schnittpunkt tatsächlich die Lösung. Folglich ist es zur Untersuchung von Interferenzen sinnvoll, von vornherein mit überbestimmten Koordinatensystemen zu arbeiten, deren Ursprungspunkte den Quellpunkten entsprechen.



Parametrische Darstellung eines Interferenzsystems.

Die Leitgeschwindigkeiten von x-Achse und y- Achse verhalten sich wie 3:2.

Die Darstellung wandelt sich dann in die Form: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ mit $x = 3t$, $y = 2t$, $z = 3t$. Die z -Achse wäre hierbei die negative x -Achse, deren Ursprung um 3 Einheiten nach rechts verschoben ist, $z = -x+3$. Somit entspricht der Kanalzahl einer Abbildung die Anzahl einzuführender Koordinatenachsen. Den Denkgewohnheiten entsprechend würden bei dieser Darstellungsform nicht zwei sich schneidende Geraden gezogen, sondern es verstünde sich von selbst, daß zur Lösungsmenge nur Punkte gehören, die durch alle n Koordinaten bestimmt sind. Somit kann die Wahl eines angepassten Koordinatensystems die Arbeit mit Interferenzen erheblich vereinfachen.

Orthogonale Interferenzsysteme

Für technische Realisierungen mit binären Bäumen zur Ausfächerung der Wellenfronten sind orthogonal orientierte Koordinatensysteme in der Form

$$r = \Delta x + \Delta y + \Delta z$$

von Interesse. Mit dieser Darstellung wird ein Auftreten gebrochener Schrittweiten im Kanalraum vermieden. Jeder Einspeisungspunkt stellt den Ursprung einer Koordinatenachse dar.

D=2, K=4: Ausgangskordinaten x, y (orthogonale Distanzen)
 Interferenzkoordinaten $x, y, u=d-x, v=d-y$

D=3, K=6: Ausgangskordinaten x, y, z
 Interferenzkoordinaten $x, y, z, u=d-x, v=d-y, w=d-z$

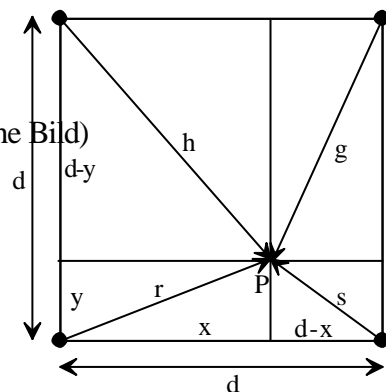
Multipolare, radiale Interferenzsysteme

Isotrop mit Leitbahnen durchzogene und multimediale Räume sind an Interferenz-Radien in der phytogoräischen Betragsform

$$r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

gebunden (siehe Bild).

D=2, K=4: Interferenzkoordinaten r, s, g, h (Radien, siehe Bild)
 D=3, K=6: Interferenzkoordinaten r, s, p, g, h, q



Übergang zwischen den Systemen

Nach dem Satz von Phytogoras lassen sich die multipolaren Radien für ein (D=2, K=4) System

(2- dimensional, 4 Kanäle) bestimmen zu:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$s^2 = (d-x)^2 + y^2$$

$$g^2 = (d-x)^2 + (d-y)^2$$

$$h^2 = x^2 + (d-y)^2$$

Analog ist für Multipolarsysteme anderer Dimension zu verfahren.

Es ist zu beachten, daß im Gegensatz zum paraxialen Raum der Optik keine Verzerrungen zwischen Vorlage und Bild entstehen müssen.

Wird eine Vorlage mit den Radien r,s,g,h (siehe Bild) auf ein Bild der Radien r',s',g',h' abgebildet, so ist dies immer möglich, wenn alle den Raum aufspannenden Dreiecke zueinander kongruent bleiben können, dh. wenn eine Spiegelung existiert, für die gilt

$$s = ks', \quad r = kr', \quad g = kg', \quad h = kh'.$$

Matrixdarstellungen

Zur Vereinfachung der Rechnung mit orthogonalen Systemen in Matrixdarstellung können zusätzliche Matrixoperationen definiert werden, die Interferenzfaltungen der gewählten Art in vereinfachter Weise anschaulich symbolisieren. Die dargestellten Produkte und Summen sind unabhängig vom Medium für beliebige Zeitfunktionen definiert, also für periodische Wellen ebenso, wie für impulsartige Funktionen.

Orthogonales Interferenzprodukt (Matrixprodukt)

Das gewöhnliche Matrixprodukt $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ zweier verketteter Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ vom Typ (m,n) und $\mathbf{B} = (b_{jk})$ vom Typ (n,p) stellt gleichzeitig das Interferenz- oder Faltungsprodukt zweier orthogonal einlaufender Wellen dar.

Als Ergebnismatrix vom Typ $\mathbf{C} = (c_{ik}) = \mathbf{AB}$ vom Typ (m,p) entsteht

$$c_{ik} \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \diamond & \diamond \\ \diamond & \diamond \\ \diamond & \diamond \end{array} \right)$$

Das in der i -ten Zeile und k -ten Spalte stehende Element ergibt sich in bekannter Weise als Skalarprodukt des i -ten Zeilenvektors mit dem k -ten Spaltenvektor.

$$\text{Beispiel } (2,3) (3,4) = (2,4) \quad \left(\begin{array}{ccc} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ -3 \end{array} \right)$$

Das orthogonale Interferenzprodukt (Matrixprodukt) gestattet zB. orthogonal zueinander auf eine Oberfläche mit logarithmischen Summationseigenschaften einfallende Vektoren zu addieren.

Bidirektionales Interferenzprodukt

Über die gewöhnliche Orthogonalfaltung hinaus kann es nützlich sein, weitere Faltungen per Definition bereit zu halten, die in konventioneller Mathematik nicht definiert sind. Das bidirektionale oder contradirektionale Interferenzprodukt möge als Faltung aufeinanderzugehender Vektoren definiert werden.

Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$, $\mathbf{B} = (b_{ik})$ vom gleichen Typ (m,n) ergeben das bidirektionale Interferenzprodukt $\mathbf{C} = (c_i) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ vom Typ $(m,1)$

$$c_i \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{i(n-j+1)} \quad \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{array} \right)$$

Man beachte, das \mathbf{C} in jedem Falle einen Spaltenvektor darstellt. Das in der i -ten Zeile stehende Element ergibt sich als Skalarprodukt des i -ten Zeilenvektors mit dem i -ten Spaltenvektor.

$$\text{Beispiel } (2,3) \otimes (2,3) = (2,1) \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & -5 \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -6 \\ 19 \end{array} \right)$$

Das bidirektionale Interferenzprodukt gestattet zB. parallel zueinander auf eine Oberfläche mit logarithmischen Summationseigenschaften einfallende Vektoren zu addieren.

Orthogonale Interferenzsumme

In Analogie zum Matrixprodukt wird die Aufsummation von orthogonal zueinander einlaufenden Vektoren eingeführt. Man beachte den Unterschied zu herkömmlichen Matrixsummen, insbesondere zur einfachen Addition typgleicher Matrizen, bei der beide Matrizen elementweise addiert werden.

Die orthogonale Interferenzsumme $\mathbf{C} = \mathbf{A} \# \mathbf{B}$ zweier verketetter Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ vom Typ (m,n) und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ vom Typ (n,p) stellt die gefaltete Summation zweier orthogonal einlaufender Wellen dar. Als Ergebnismatrix vom Typ $\mathbf{C} = (c_{ik})$ vom Typ (m,p) entsteht

$$c_{ik} \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} + \sum_{j=1}^n b_{jk} \quad \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right) \# \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \diamond & \diamond \\ \diamond & \diamond \\ \diamond & \diamond \end{array} \right)$$

Das Doppelkreuz möge an zwei ineinander liegende Pluszeichen erinnern, die orthogonal führende Wege begrenzen.

Das in der i -ten Zeile und k -ten Spalte stehende Element ergibt sich als elementweise Aufsummation des i -ten Zeilenvektors mit dem k -ten Spaltenvektor.

$$\text{Beispiel } (2,3) \# (3,2) = (2,2) \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & -3 \end{array} \right) \# \left(\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{array} \right)$$

Die orthogonale Interferenzsumme gestattet zB. orthogonal zueinander auf eine Oberfläche mit linearen Summationseigenschaften einfallende Vektoren zu addieren.

Bidirektionale Interferenzsumme

In Analogie zum bidirektionalen Interferenzprodukt soll die bidirektionale oder contradirektionale

Interferenzsumme als Faltungssumme aufeinanderzugehender Vektoren definiert werden. Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$, $\mathbf{B} = (b_{ik})$ vom gleichen Typ (m, n) ergeben die bidirektionale Interferenzsumme $\mathbf{C} = (c_i) = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ vom Typ $(m, 1)$

$$c_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{i(n-j+1)}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} + \sum_{j=1}^n b_{i(n-j+1)} \quad \begin{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{pmatrix}$$

Man beachte, das \mathbf{C} in jedem Falle wieder einen Spaltenvektor darstellt. Das in der i -ten Zeile stehende Element ergibt sich als elementweise Summation des i -ten Zeilenvektors und des i -ten Spaltenvektors.

$$\text{Beispiel } (2,3) \oplus (2,4) = (2,1) \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 2 & 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die bidirektionale Interferenzsumme gestattet zB. parallel zueinander auf eine Oberfläche mit linearen Summationseigenschaften einfallende Vektoren zu addieren.

Walsh- Analyse

Für technische Anwendungen ist die Zerlegung eines binärwertigen Eingangssignals $x(t)$ in Form einer einfach zu realisierenden Walsh-Analyse¹²⁵¹

$$x(t) = W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [W_{cn} \text{cal}_n(t) + W_{sn} \text{sal}_n(t)]$$

mit

$$W_{cn} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \text{cal}_n(t) dt$$

$$W_{sn} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \text{sal}_n(t) dt$$

$$W_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt = A_c$$

möglich. Es entsteht ein orthogonales Spektrum der Zeitfunktion.

¹²⁵¹ Harmuth, H.F.: Transmission of Information by Orthogonal Functions. Springer-Verlag, 2. Aufl. 1972