

"Wenn Ihr das, wovon ihr sprecht, messen und durch eine Zahl ausdrücken könnt, so wißt ihr etwas von Eurem Gegenstand. Könnt Ihr es aber nicht messen, könnt Ihr es nicht in Zahlen ausdrücken, so sind Eure Kenntnisse armselig und sehr ungenügend."
Lord Kelvin

Mittelwert, Korrelation, Faltung

Bisherher stehen die vorgestellten Interferenz-Methoden noch ohne Bezug zur Mathematik im Raum. Demgegenüber existiert eine Vielzahl mathematischer Methoden, die den Zugang zu Interferenztechniken erleichtern können.

Durch die Vielfalt mathematischer Methoden zieht sich eine Grundidee: die des quadratischen Mittelwertes, die der Multiplikation zweier Zeitfunktionen. Für den Nichtmathematiker ist es äußerst mühsam, diesen roten Faden in den verschiedenen Methoden aufzufinden. Andererseits ist es mit Kenntnis dieses Fadens leicht möglich, Transformationen auf ihre Anwendbarkeit zu prüfen, um z.B. Integrationsgrenzen zu beurteilen.

Im folgenden sei ein Zugang zum besseren Verständnis im Umgang mit Zeitfunktionen dargestellt. Die folgenden Abschnitte sind, auch wenn sie aus unterschiedlichen Bereichen der Mathematik stammen mögen, am Faden des quadratischen Mittelwertes aufgereiht.

Zeitliche Mittelwertbildung

Linearer Mittelwert, Moment erster Ordnung

Wird eine Zeitfunktion innerhalb bestimmter Integrationsgrenzen integriert, und das Ergebnis durch die Intervalllänge dividiert, entsteht der *lineare Mittelwert* oder das Moment erster Ordnung.

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt$$

Eine andere, gleichwertige Schreibweise ist die mit veränderten Integrationsgrenzen.

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt$$

Für periodische Zeitfunktionen werden die Integrationsgrenzen der Periode entsprechend gewählt, für *nichtperiodische Zeitfunktionen* ist der Grenzwert $T \rightarrow \infty$ zu bestimmen.

$$\bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt$$

Dieser Mittelwert stellt die *Gleichkomponente* eines Signals dar. Entsprechend stellt die folgende *Wechselkomponente* den verbleibenden Rest dar.

$$x_{\cdot}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$$

Der lineare Mittelwert ist in der Elektrotechnik mit dem Begriff des Potentials oder des Arbeitspunktes verbunden.

Für *zeitdiskrete Signale* kann T durch N ersetzt werden,

$$\bar{x}(n\tau) = \frac{1}{N\tau} \sum_{n=1}^N x(n\tau) \tau$$

entsprechend ist das Integral durch eine Summe zu ersetzen. Man verzeihe die ungewöhnliche Schreibweise, τ wird gekürzt.

Der *lineare* Mittelwert stellt z.B. den Gleichanteil in einer Fourier-Entwicklung dar (siehe folgende Seiten).

Aus dem Problem heraus, daß der (lineare) Mittelwert einer periodischen, gleichanteilsfreien Funktion immer Null ist, gab es eine einfache Lösung: Die Quadratur. Willkürlich werden nun die im Vorzeichen verschiedenen Anteile negativ gewertet, und die im Vorzeichen gleichen Anteile positiv. Für den Fall einfacher Quadratur einer Funktion entfallen die Ersteren.

Quadratischer Mittelwert, Moment zweiter Ordnung

Als quadratischer Mittelwert wird für periodische Signale der Ausdruck

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt$$

bezeichnet. Für nichtperiodische Funktionen ist entsprechend dem vorangegangenen Abschnitt der Grenzwert für $T \rightarrow \infty$ zu bestimmen.

Die Wurzel aus dem quadratischen Mittelwert wird in der Wechselstromtechnik als Effektivwert bezeichnet, und ist mit dem Begriff der *Signalleistung* verbunden. Für sinusförmige Schwingungen läßt sich der Effektivwert zu eins durch Wurzel zwei mal Spitzenwert bestimmen.

Korrelation

Autokorrelation

Im Quadrat $x^2(t) = x(t) \cdot x(t)$ wird eine der Komponenten durch dieselbe, aber um die Zeit τ verschobene Funktion ersetzt.

$$\Psi_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t-\tau) dt$$

Man erhält eine Aussage darüber, wie stark die betreffende Funktion bei Verschiebung um τ mit sich selbst übereinstimmt. So kann ermittelt werden, wie groß eine im Rauschen versteckte, in τ periodische Komponente des Signals ist. Je länger gemessen wird, desto genauer wird die zu erhaltende Korrelation sein. Auch hier können die Integrationsgrenzen verschoben werden. Für eine in τ periodische Funktion sind quadratischer Mittelwert und Autokorrelation identisch. Die Autokorrelation wird deshalb auch als verallgemeinerter Mittelwert betrachtet. Als Besonderheit gilt

$$\Psi_{xx}(-\tau) = \Psi_{xx}(+\tau),$$

da es für $T \rightarrow \infty$ gleichgültig ist, ob Funktion und zeitverschobene Funktion rechts oder links voneinander liegen.

Kreuzkorrelation

Wird die um τ verschobene Zeitfunktion $x(t - \tau)$ durch eine beliebige, andere Funktion $y(t - \tau)$ ersetzt, erhalten wir eine Aussage über die Korrelation verschiedener Funktionen zueinander.

$$\Psi_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)y(t - \tau) dt$$

Die Funktion Ψ_{xy} wird als Kreuzkorrelation bezeichnet. Für $y(t - \tau) = x(t)$ geht diese Gleichung wieder in den quadratischen Mittelwert der nichtperiodischen Funktion über.

Fourier-Entwicklung

Wird die Funktion $y(t - \tau)$ aus dem vorangegangenen Abschnitt als eine periodische Funktion $\cos(n\omega_0 t)$ bzw. $\sin(n\omega_0 t)$ betrachtet, finden wir die Übereinstimmung (Korrelation) einer Funktion $x(t)$ mit den entsprechenden periodischen Funktionen als Zahlenwert. Diese Zahlenwerte werden als Spektralkoeffizienten oder Fourierkoeffizienten bezeichnet.

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt; \quad B_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Man beachte die verschleierte Verdopplung der Koeffizienten durch Verschiebung der Integrationsgrenzen gegenüber der Bildung des quadratischen Mittelwertes.

Zweckmäßigerweise wird T durch π ersetzt, um sinnvolle Integrationsgrenzen zu erhalten. Die Entwicklung bringt eigentümlicherweise als Koeffizienten für $n = 0$ den doppelten, *linearen* Gleichanteil hervor:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt.$$

Das Fourier-Spektrum ist dann die Summenfolge der Fourierkoeffizienten, und gibt die Zeitfunktion selbst wieder.

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)); \quad \text{mit } \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Die Spektralfunktion entsteht in Form des sog. *Linienspektrums*. Mit dem *Satz von Euler* in der Form

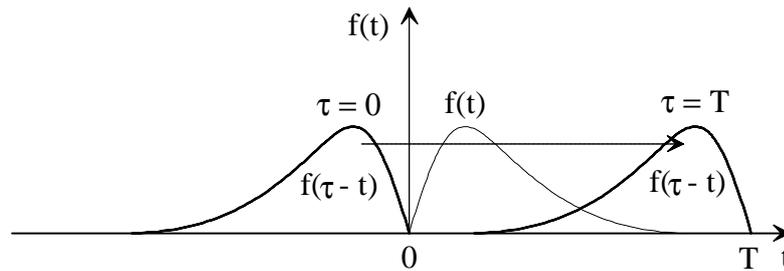
$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}) \quad \text{bzw.} \quad \sin z = -\frac{j}{2}(e^{jz} - e^{-jz}); \quad z = n\omega_0 t$$

lassen sich die Sinus- und Kosinusanteile als komplexe Amplituden darstellen. Daraus läßt sich eine *kontinuierliche* Darstellung des Spektrums gewinnen.

Faltung

Im letzten Schritt soll nun der zweite Teil $f(t)$ unserer ursprünglichen Quadratfunktion der Mittelwertbildung durch eine in Richtung der Zeitachse rückwärts laufende Funktion $f(-t)$ ersetzt werden, die noch dazu um einen konstanten Wert $-\tau$ verschoben beginnen soll,

$$f(-t + \tau) = f(\tau - t).$$



Nach einer Substitution von Variablen entdecken wir das Faltungsintegral. Integriert wird hier über den Parameter t . Der Definitionsbereich (hier $0 \dots T$) ist abhängig von der zu lösenden Aufgabe.

$$y(t) = \int_0^T g(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

g wird oft als Gewichtsfunktion bezeichnet, und kennzeichnet z.B. die Systemantwort auf einen Stoß. Es sind verschiedene Besonderheiten dieser Schreibweise zu erkennen, die eine universelle Eignung für mittelwertbildende Zwecke nicht sonderlich befördern.

- Die Normierung auf die Länge des Integrationsintervalls ist entfallen.
- In üblicher Schreibweise wird angenommen, daß die Länge des Integrationsintervalls gleich der positiven Verschiebung der zweiten Funktion ist, $T = \tau$. Damit können beide Funktionen im Negativen undefiniert bleiben, die Funktion mit den negativ einzusetzenden Zeiten wird von positiven Werten kommend nur bis $t = 0$ beansprucht.
- Das Integrationsintervall wird aus gleichem Grunde unsymmetrisch gewählt.

Eine Faltung kann aus dieser Sicht, aus der Sicht lokaler Überlagerung oder Interferenz, als eine Quadratur oder Leistungsermittlung betrachtet werden, bei der nicht irgendein Spektrum oder Gleichwert gefordert ist, sondern bei der die im Ort $\tau/2$ ($0 < t < \tau$ für $\tau = T$) lokalisierte Korrelation ermittelt werden soll, wenn beide Zeitfunktionen von $+t$ und $-t$ kommend gegeneinanderfließen. Die Wahl $\tau = T$ hat dabei noch einen plausiblen Grund: Für $t = 0$ liegen die Funktionen exakt, aber entgegengesetzt übereinander. Bis zum Erreichen des Integrationsendes werden sie genau in ihrer vollen Länge gegeneinander verschoben.

Für Interferenzanwendungen interessiert eine implizite Zuordnung eines Zielortes zur Faltung. Als Zielort kommt - bildlich 'gefaltet' - nur der Ort in der Mitte des Integrationsintervalls $\tau/2$ in Frage. Es ist ersichtlich, daß an dieser Stelle die Unsymmetrie der klassischen Faltung zu stören beginnt. Die Lokalisierung auf $\tau/2$, die in der Literatur bislang unbeachtet bleibt, macht die Faltung zur ersten, bislang bekannten, mathematischen Methode zur Ermittlung von ortsgebundenen Interferenzen interessant.

Eine interessante Eigenschaft der Faltung ist die Vertauschbarkeit der Argumente. So gilt

$$y(t) = \int_0^T g(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_0^T g(t - \tau) x(\tau) d\tau.$$

Eine Hinweis auf eine hier entstehende, neue Plausibilitätsbarriere sei gestattet. Man könnte annehmen, daß die Natur jede Licht-, Schall-, Wasser-, oder Nervenwelle in jedem Ort entsprechend dieses Faltungssatzes überlagert. Das ist offenkundig nicht der Fall. Die Natur überlagert meist additiv, nicht multiplikativ.

Eine Addition der Funktionswerte zur Faltung natürlicher Wellen kann ausgeschlossen werden, da die Addition von Funktionen eine Vervielfachung damit verbundener Leistungen

(quadratischer Mittelwerte) mit sich brächte. Die Summation der Leistungen zweier Wellenzüge sollte korrekt wiedergegeben werden können.

Anschaulich wird die Nichteignung der Faltung (der dahinterstehenden Multiplikation der Funktionswerte) publik, wenn man die Reproduzierbarkeit einer Stammfunktion als Kriterium einbezieht. Jede zusätzliche Faltung verschärfte die Funktion weiter.

Summative Interferenzfaltung

Verlassen wir die Mittelwertbildung mit ihren Nutzenanwendungen mit der Gewissheit, daß die bekannte Art zu Falten für die Beschreibung von Interferenz wenig interessant ist.

Da zu neuronalen Überlagerungsmöglichkeiten definitiv wenig bekannt ist, sehen wir uns zunächst die Optik an, um das Wesen von Interferenz erfassen zu können.

Der mathematische Zugang zur optischen Interferenz ist über den Kirchhoffschen Knotenstromsatz gegeben: Die Summe aller Lichtströme Φ , die einen Punkt definierter Größe treffen, sollte unabhängig davon, inwieweile Teile der Strahl zerfällt, konstant sein. Die Menge an Lichtstrom, die in ein Gebiet eintritt, sollte gleich groß der Menge an Lichtstrom sein, die dieses Gebiet verläßt. Unter 'Gebiet' stelle man sich eine infinitesimal kleine Schleife oder geschlossene Kurve vor. (Der Wellencharakter des Lichtes bleibe noch unberücksichtigt).

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n; \quad \Phi_{in} = \Phi_{out}$$

Dann besteht die 'Faltung' verschiedener Wellenzüge unterschiedlicher Zeitfunktionen zwangsläufig in der Addition und Aufintegration der Werte an dem Ort, der durch die Treffpunkte der Achsen und die Metrik des Raumes vorbestimmt ist. Die Integration ist insofern von Belang, als sie ein Schwellwertkriterium für folgend zu betrachtende, neuronale Faltungen bereitstellen kann.

Für die Menge an Licht, die zwei gegenläufige Wellen im Intervall $0 \dots \tau$ an den Ort $\tau/2$ transportieren, gilt offenbar

$$y(t) = \int_0^{\tau} [x_1(t) + x_2(\tau - t)] dt$$

Bei drei Wellen käme eine weitere Funktion hinzu, für n Wellen gilt dann

$$y(t) = \int_0^{\tau} [x_1(\xi_1) + x_2(\xi_2) + \dots + x_n(\xi_n)] dt \quad \text{mit} \quad t(\xi_1) = t(\xi_2) = \dots = t(\xi_n) .$$

Da eine Achse nur Gelegenheit gibt, zwei (gegenläufige) Interferenzen zu beherbergen, ist die Zeitachse aus dem Integral verschwunden. Stattdessen führen wir beliebig im Raum stehende, sich im Punkt der zu berechnenden Interferenz treffende Achsen ein, deren lokales, auf den Faltungspunkt bezogenes Zeitmaß gleich sei.

Das Problem, die Interferenz einer Fläche von Punkten zu bestimmen, besteht dann im Wesen darin, die Transformationen eines globalen Koordinatensystems zu den punktbezogenen Inertialsystemen effizient durchzuführen.

Maskenalgorithmus zur Interferenzfaltung

Es soll ein Maskenalgorithmus zur räumlichen Rückfaltung eines Interferenzraumes vorgestellt werden, mit dem eine Hin- und Rückrechnung eines mehrdimensionalen Interferenzraumes auf die Spuren verschiedener Interferenzkanäle möglich wird.

Die Erkennbarkeit neuronaler Vorgänge in der neurologischen Praxis wird erschwert durch den Umstand, daß sämtliche neuronale Übertragungen an interferenziell codierte Impulse gebunden sind. So ist die Frage nach der Aufgabe eines Neurons nicht ohne Rückfaltung des betrachteten Interferenzraumes zu bestimmen, da es an einer Vielzahl komplexester Verarbeitungsvorgänge beteiligt ist. Eine solche Rückfaltung ist bislang nicht bekannt. Wahrscheinlich fehlen sowohl theoretische Grundlagen als auch technische Voraussetzungen.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist der Gedanke, ein in der Natur vorhandenes, elektrisches Interferenzsystem zu benutzen, daß ein Bild (sensorische Aktivitätskarte) mittels Impulsen auf wenige Leitbahnen (Nervenstränge) codiert. Wenn interferenzielle Wirkungen vorausgesetzt werden, sollte eine interferenzielle Rückfaltung der seriell aufgenommenen Kanalinformationen der Nervenstränge ein Abbild der Aktivitätskarte ermöglichen.

Dieses Verfahren zur interferenziellen Rekonstruktion eines mittels EEG (EMG, EKG) aufgenommenen, neuronalen Interferenzraumes eines biologischen Objekts soll diskutiert werden. Eine zwei- und/oder dreidimensionale Darstellung des daraus berechneten Bildraumes, der neben bildgebenden Elementen auch sensorische Amplituden und Bewegungselemente tragen kann, soll in den Hauptspeicher eines Computers eingeschrieben werden können. Damit könnte zB. der Neurochirurg den Zustand des (sensorischen) Nervensystems eines Körperteils effizient und schnell beurteilen. Da pro zu generierendem Bild minimal zehn Milliarden Multiplikationen zu berechnen sind, wäre ein herkömmlicher PC mit dieser Aufgabe überfordert. Um in akzeptablen Zeiten ein Bild zu berechnen, bedingt die Aufgabe zur Zeit noch eine speziell anzupassende Hardware, zB. in Form eines massiv-parallelen Rechners.

Vergleichbare Techniken

Bislang ist es dem Neuro- Analytiker möglich, Nervenleitgeschwindigkeiten zu bestimmen, die neuronale Aktivität einzelner Nervenfasern in Diagrammform zeichnen zu lassen und typische, bekannte Impulsmuster zu vergleichen. Es ist hingegen nicht möglich, aus dem Zeitversatz eines Impulsmusters auf eine nervliche oder geistige Anomalie, Störung oder Krankheit zu schließen. Auch ist es dem Neurologen relativ schwer möglich, zu beurteilen, was eigentlich die vielen Impulse zu bedeuten haben.

Interferenzielle Wirkprinzipien sind vielfältig bekannt, und werden vielfach genutzt. So in der Verkopplung großer Antennenanlagen in der Radioastronomie, oder zur Strahlsteuerung von Phased Array^{126]}- Antennen in der Radartechnik. In jüngerer Zeit werden phasengesteuerte Arrays auch in der Ultraschalldiagnostik^{127]} zur Strahlsteuerung benutzt. Interferenzen bilden die Grundlage der Wellenbewegung des Wassers, ebenso das allgemeine Wirkprinzip jeder optischen Abbildung.

Als elementare Interferenzoperation stellt sich die Faltung (das Faltungsintegral) von Funktionen in vielfältigen, der Mathematik bekannten Formen dar. Eine Visualisierung von Rückfaltungen war bislang nicht möglich, die dazu benötigten Rechenleistungen liegen im Gigaflopereich pro 2- dimensionalem Schnittbild.

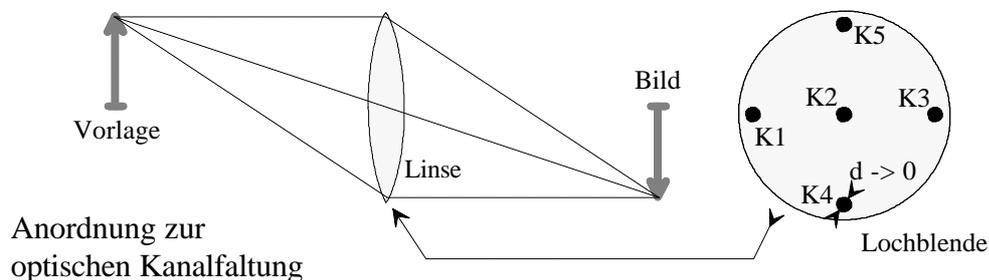
^{126]} Baur, E.: Einführung in die Radartechnik. B. G. Teubner Stuttgart, 1985.

^{127]} Krestel, E.: Bildgebende Systeme für die medizinische Diagnostik. Siemens AG, Berlin / München 1980

Technisch bildgebende Interferenzverfahren hingegen sind wohl aufgrund der hohen Rechenkomplexität in dieser Form noch nicht bekannt. Holografische Verfahren sind artverwandt, orientieren aber auf eine Rückfaltung in einem Medium, nicht mit einem Rechner. Bei geläufigen, in der Tomographie angewandten Verfahren orientiert man sich an einer Rückrechnung des Dichteprofiles des untersuchten Körpers. Die dafür angewandten Verfahren haben mit den hier betrachteten Interferenzverfahren nur wenig Gemeinsamkeiten.

Optisches Analogon

Wird eine optische Linsenanordnung mit einer Lochblende zunehmend abgedeckt, sodaß einige Öffnungen des Durchmessers d stehen bleiben, sind sämtliche Strahlen des Bildes gezwungen, durch die verbleibenden Öffnungen zu gelangen. Wird der Durchmesser der Öffnungen soweit reduziert, daß *alle* Strahlen durch dieselben Linsenpunkte gehen, kann für den jeweiligen Punkt eine Zeitfunktion ermittelt werden.



Grenzwert für $d \rightarrow 0$

Unter den vereinfachenden Annahmen, die Vorlage möge mit monochromatischem, einphasigen Licht beleuchtet sein und Interferenzen mit der Blende seien ausgeklammert, überlagern sich in den Kanälen K_k die Strahlen aller Bildpunkte additiv. Da sich Imaginär- wie Realteile der frequenzgleichen Funktionen $f_i(t)$ gleichermaßen addieren, entsteht in Summe als Kanalinformation im Mittelpunkt des Loches eine einzige, wiederum sinusförmige Funktion gleicher Frequenz, aber gemittelter Phase.

$$\sum f_i(t) = \sum A_i \exp(j\varphi_i) = \{ \sum A_i \} \{ \sum \exp(j\varphi) \} = A_k \exp(j\varphi_k)$$

(Eine Darstellung der Form $A_i \exp(j\omega t)$ mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ kann für den stationären Fall auf die Darstellung der komplexen Phase $A_i \exp(j\varphi_i)$ reduziert werden.) Sind beispielsweise fünf Kanäle (fünf inkrementale Öffnungen) vorhanden (siehe Bild), wäre das Bild auf der anderen Seite aus den fünf auf diese Weise gewonnenen Sinusfunktionen rekonstruierbar. Diese Aussage ist offensichtlich falsch, da in fünf Sinusfunktionen gleicher Frequenz und lediglich verschiedener Phase und Amplitude kein komplexes Bild enthalten sein kann. Es entsteht die Frage, ab welcher Größe d der Öffnungen die Bildinformation verloren geht. Aus dem praktischen Versuch ist bekannt, daß eine Linse in großen Teilen sehr wohl zB. mit schwarzer Farbe abgedeckt werden kann. Dann sinkt zwar die Bildhelligkeit, der Bildinhalt jedoch bleibt erhalten. Entweder ist der Erhalt der Strahlrichtung des Einzelstrahls erforderlich, um zu einer Abbildung zu gelangen. Dann müssen inkremental in jeder Öffnung noch einige Strahlen nebeneinander passieren können, um die Wellenfrontrichtung übermitteln zu können. Oder es sind hinreichend viele Inkrementalöffnungen erforderlich, um ein komplexes Bild zu übertragen. (Hier sind Analogien zu den Betrachtungen über Kanalzahl und Feuerdichte neuronaler Systeme erkennbar: Die Feuerdichte darf einen bestimmten Grenzwert nicht übersteigen, damit Phantombilder vermieden werden.)

Andererseits ist aus Beugungsversuchen bekannt, daß die Bildinformation tatsächlich verloren geht, wenn die Strahldicke oder die Öffnung der Blenden in den Bereich der Wellenlänge reicht $d \rightarrow \lambda$. Das Bild der Lichtquelle geht verloren, sonst wäre die Erzeugung Fraunhoferscher Interferenzlinien nicht möglich. Wird die einzelne Öffnung nur ein wenig vergrößert, wird für $d = n\lambda$ aus dem Beugungsapparat eine Lochkamera, sobald das Wirken mehrerer Elementarwellen Wellenfrontrichtungen definieren kann.

Obwohl eingangsseitig Interferenzen mit der Blende ausgeschlossen wurden, schließt sich hier wieder der Kreis: Es ist nicht die Interferenz mit der Blendenkante, die die Abbildungsqualität mit sich verringernden Öffnungsdurchmessern zunichte macht, sondern die im Bereich $d \rightarrow \lambda$ auftretende Unmöglichkeit der Übermittlung der Frontrichtung des einzelnen Wellenzugs. Durch diese Unmöglichkeit erst wird er *scheinbar* gebeugt. Nebenbei gelangen wir mit dieser Grenzwertbetrachtung zu einer klareren Auffassung des Begriffes optischer Beugung. Beugung ist im Huygenschen Sinne das Normale. Nichtbeugung und scheinbare Geradlinigkeit der Ausbreitung eines gebündelten Lichtstrahls sind auch im Wellenraum des Lichts als Interferenzerscheinungen mehrerer Inkrementalkanäle eines Strahls zu interpretieren.

Folglich ist auch im optischen Bereich eine wachsende Kanalzahl (besser eine wachsende Zahl von Inkrementalkanälen) erforderlich, je höher der Bildinhalt ist, dh. je feiner die Granularität des zu übertragenden Bildes sein soll.

Auf der Bildseite ist schließlich die Rückfaltung aus dem Kanalraum vorzunehmen. Es gilt wiederum obige Summenformel. Im Ergebnis entsteht die Bildpunktamplitude. Die Phasensumme ist uninteressant, da sie lediglich einen Absolutzeitbezug darstellt.

Transformation

Das Verständnis der Wirkungsweise elektrisch abbildender (neuronaler) Systeme ermöglicht es, elektrische Interferenzräume zu erklären, die den Projektionsraum eines kontinuierlichen Interferenzraumes (zB. Ultraschall- oder Radarfeld, neuronales Feld) darstellen. Es wurde gezeigt, daß bei geeigneter Anordnung mehrerer Sensoren (Mikrofone, Antennen, Elektroden) und einer entsprechenden mikroelektronischen Zwischenspeicherung ein Interferenzbild des Raumes gewonnen werden kann, aus dem im Folgeschritt durch mehrdimensionale, zeitdiskrete oder zeitkontinuierliche Faltung und Integration ein zwei- oder dreidimensionales Bild des (sichtbaren) Raumes errechenbar ist.

Ausgangspunkt ist die allgemeine Abbildungsgleichung für die interferenzielle Übertragung eines Bildpunktes zwischen Vorlage und Bildraum (Eigeninterferenz),

$$\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = \text{const.}$$

die für den Fall von Fremdinterferenz in der Form

$$\tau_n - \tau_m = (t_n - t_o) - (t_m - t_o) = t_n - t_m$$

bzw.

$$\underline{Y} = \underline{T}$$

geschrieben werden kann. Die Gleichung berücksichtigt die Interferenz gleicher ($t_n - t_m = 0$), wie verschiedener Wellenzüge ($t_n - t_m \neq 0$) eines periodischen oder teilweise periodischen Mediums miteinander. Dabei ist die Abbildung inhaltlich in zwei Teile gespalten: in die Laufstrecken im neuronalen Raum und die im elektrischen Raum.

Die Wanderung einer beliebigen *Wellenfunktion* $\delta(x,t)$ erfolgt in der Zeit (t) wie im Raum (x) gleichsam. So gilt zB. für das Vorkommen eines gaußartigen Erregungsimpulses

$$\exp(-(x-x_0)^2) = \exp(-v(t-t_0)^2)$$

bzw. in Raum *und* Zeit

$$\delta(x, t) = \exp \left\{ -[(x - x_0) - v(t - t_0)]^2 \right\}.$$

Wird ein Feld eines Raumes mit k Kanälen 'abgehört', entstehen k Speicherspuren, deren Bildinformation rückzufalten ist. Dazu ist die Eigenschaft des kontinuierlichen Raumes, Interferenzen an beliebigen Orten zu bilden, nachzuvollziehen.

Eine mathematische Möglichkeit dafür besteht in der Berechnung eines entarteten, mehrdimensionalen Faltungsintegrals für jeden Bildpunkt und jede Achsenrichtung (Kanäle ξ, ψ, \dots, ζ , Kanallänge τ , Punktkoordinaten- Abstand von den Quellpunkten $t_x, t_y, \dots t_z$) zB. in der Form

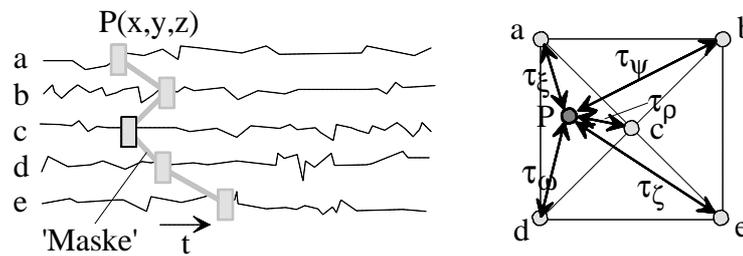
$$p_{\xi, \psi, \dots, \zeta} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} a_{\xi}(t - \tau_{\xi}) \otimes a_{\psi}(t - \tau_{\psi}) \dots \otimes a_{\zeta}(t - \tau_{\zeta}) dt.$$

Substitution von t durch s/v gestattet es, die räumliche Repräsentation zu rekonstruieren. Hinter dem Operatorsymbol \otimes könnten im Prinzip verschiedene Operationen stehen, wie Summe, arithmetisches Mittel, geometrisches Mittel, normiertes Produkt und Schwellwertsumme etc..

Da zwischen Zeit t und Ort x, y, z eine durch die Laufgeschwindigkeit v eines Signals vermittelte Abhängigkeit besteht, die Zeit aller Übertragungskanäle aber gleichzeitig abläuft, ist das Problem für einen einzelnen Bildpunkt auf die Berechnung einer 'Maske' (siehe Bild) reduzierbar, die in sich fest zusammenhängend und mit der Zeit als Parameter über die Zeitfunktion der einkommenden Signale $a, b, \dots e$ verschoben wird. Jedem Bildpunkt eines dreidimensionalen Raumes ist folglich eine solche Maske von Zeitverschiebungen ξ, ψ, \dots, ζ zuordenbar.

Alle zur Maske gehörenden Werte $a, b, \dots e$ werden kontinuierlich miteinander verknüpft, und über die Zeit von mindestens einer vollen Abtastperiode integriert. Die Maskensätze aller Punkte und die Anordnung der Senkenpunkte sind einander fest zugeordnet. Die Masken aller Punkte des Bildraumes sind also in Abhängigkeit der Anordnung nur einmalig zu berechnen.

Das eigentlich zu lösende Problem besteht darin, ein effizientes Verfahren zur schnellen Berechnung der Faltungsintegrale aller Punkte zu implementieren. Dazu ist es empfehlenswert, mit einem hinreichend genauen 'Werkzeug', dh. mit einem Computer hoher Geschwindigkeit vergleichende Berechnungen von Faltungen mit hoher Genauigkeit vorzunehmen, um hernach die Zeitauflösung der Eingabevektoren (der Kanäle) sowie die Auflösung der Kanaldaten schrittweise soweit zu reduzieren, daß eine noch akzeptable Bildqualität erhalten bleibt.



Bei einer anzustrebenden Raumauflösung (gleich Maskenzahl m) im Bereich von $r^3 = 5000 \cdot 500 = 10^6$ Pixel, einer diskret vorliegenden Tiefe der Zeitfunktionen (Kanallänge l) von 5000 Schritten und $k = 8$ Übertragungskanälen sind als Zielvorgabe zum Beispiel

$$m = r^3 \quad (125 \cdot 10^6)$$

Masken zu berechnen.

Für die Berechnung jeder Maske sind k Übertragungskanäle jeweils miteinander zu multiplizieren. Das Ergebnis jeder neuen k - fach Multiplikation ist zu den bisher erfolgten

Multiplikationen aufzuaddieren, hernach ist zur Berechnung des diskretisierten Integrals durch die Kanallänge l zu dividieren.

Folglich sind mehr als

$$\mu = r^3 \cdot k \cdot l \quad (5 \cdot 10^{12})$$

Multiplikationen pro Bild auszuführen. Bezogen auf einen parallelen High-End-Rechner (Suprenum- Nachfolger MANNA^{126]}, 40 Knoten a 2* i860, GMD FIRST Berlin Adlershof, ca. 3,2 Gigaflops) wird zur Berechnung eines 3D- Raumes eine Rechenzeit von etwa einer Stunde benötigt. Zur Faltung eines 2D- Raumes genügen etwa fünf Sekunden Rechenzeit.

Diese Zahlen zeigen die Notwendigkeit der Entwicklung von sehr einfachen, speziellen Faltungsprozessoren mit hohem Rechenaufkommen.

Rechner-Implementierung

Mit der Darstellung der Zeitfunktion eines Interferenzkanals a_{ki} in der diskretisierten Form

$$a_{ki} = \{a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}\}$$

kann ein RAM- Speicherabbild dargestellt werden zB. in der Form

DATk(0...15)	a_{k1}	a_{k2}	a_{kn}
ADRk(0...15)	OOOO _h	OOO1 _h	FFFF _h

DATk(0...15) stellt zB. die Amplitude eines Kanals k von -32768...+32767 dar (technisch notwendig ist in neuronalen Anwendungen möglicherweise nur eine Auflösung von 6...8 bit). ADRk(0...15) stellt die zugeordnete Adresse des Kanals k von 0...65535 dar, die identisch mit dem Zeitpunkt des Einlesens sein mag.

Damit wird das **zeitdiskrete Faltungsprodukt** eines Bildpunktes $p_{x,y,z}$ im k - kanaligen Interferenzraum der Achsen ξ, ψ, \dots, ζ bestimmt als diskretisierte Faltungssumme der Ereignisse $n = 0 \dots m$. Nach Auflösung der Summenfolgen entsprechend der Randbedingungen der Anordnung entsteht eine diskretisierte Darstellung zB. in der Form

$$p_{\xi, \psi, \dots, \zeta} = \frac{T}{m} \sum_{n=-m}^{2m} a_{\xi}(nT - \tau_{\xi}) \otimes a_{\psi}(nT - \tau_{\psi}) \dots \otimes a_{\zeta}(nT - \tau_{\zeta})$$

T kennzeichnet in diesem Zusammenhang ein diskretes Zeitraster der Ereignisse auf den Kanälen.

Das Problem läßt sich prinzipiell auf eine Mehrfach- Verknüpfung von Matrizen zurückführen. Ein diskretes Faltungsprodukt zweier Kanäle (Vektoren) A_x, A_y für einen Bildpunkt kann bestimmt werden zu $(n,1) \cdot (n,1) = (1,1)$. Folglich sind die Bildpunkte $P(x_p, y_p, z_k)$, die von k Kanälen gebildet werden, aus der Verknüpfung der Vektoren der Kanäle in Bandmatrixform

$$P(x_p, y_p, z_k) = A_1^T A_2 A_3 \dots A_k$$

bestimmbar. Nachteilig bei Anwendung von Matrixoperationen wirkt sich die Bindung an orthogonale Räume, an ein nicht zu umgehendes Matrixraster, an den einschränkenden Produkt- Operator sowie an einen unvertretbar großen Überhang für mehrfach durchzuführende, gleiche Rechenoperationen aus. Auch bereitet die Größe der zu berechnenden Bandmatrizen Schwierigkeiten. Ein Interferenzvektor muß innerhalb einer Bandmatrix mindestens einmal über seine volle Länge verschoben werden, folglich ist die

^{126]} MANNA- Ein Testbed zur Erprobung innovativer Architekturkonzepte für die Hardware und Software massiv- paralleler, konfigurierbarer Höchstleistungsrechner. GMD- FIRST, Rudower Chaussee 5, Geb. 13.7, 12484 Berlin.

Dimension der zu wählenden Bandmatrizen A_i mindestens gleich dem Quadrat der zweifachen Kanallänge $(2l)^2$, unabhängig von der geforderten Auflösung des Bildes.

Effizienter erscheint die weiter vorn erörterte Realisierung in direkter Modellierung einer Interferenz durch *Rechnung mit Summen von Partialprodukten*. Die Methodik, die vergleichbar zur Methode der schriftlichen Multiplikation die Ermittlung von Interferenzprodukten oder Faltungsintegralen gestattet, ermöglicht es, die Möglichkeiten leistungsfähiger RISC- Prozessortypen optimal zu nutzen, um im Pipelining kombinierte Multiplikations- Additionsoperationen ohne Overhead durchzuführen. Alle Operationen sind auf Tabellenform rückführbar, daraus ergibt sich eine minimale Befehlsausführungszeit, da vorzugsweise Registeroperationen genutzt werden können.

Eine Reduzierung des Berechnungsaufwandes zur mehrdimensionalen Faltung wäre durch baumförmige Staffelung der für einen Maskensatz auszuführenden Multiplikationen möglich. Damit entstünde aber das Problem, daß alle Bildpunkte in einem normierenden Raster zu liegen hätten, und daß eine lineare Unabhängigkeit der Abstandsvektoren verhindert wird. Um ein Maximum an Flexibilität zu erhalten, wird von dieser Lösung abgesehen.

Im Ergebnis skalieren Rechenzeit und Anzahl auszuführender Operationen wie folgt:

Das zu entwickelnde Verfahren zeigt lineares Wachstum der Rechenzeit t und der Anzahl der Operationen n zur Länge m der Interferenzvektoren, K und C seien frei wählbare Konstanten.

$$O(t) = Km + C; O(n) = Km + C$$

Mit der Anzahl der Kanäle k steigt linear die Rechenzeit t und der Anzahl der Operationen n .

$$O(t) = Kk + C; O(n) = Kk + C$$

Eine Maske ist für jeden Raumpunkt zu bestimmen, folglich wachsen Rechenzeit t und Anzahl der Operationen n mit der zweiten Potenz zum Rastermaß r in der Ebene und mit der dritten Potenz im Raum.

$$O(t) = Kr^2 + C; O(n) = Kr^2 + C \quad \text{für 2D bzw.}$$

$$O(t) = Kr^3 + C; O(n) = Kr^3 + C \quad \text{für 3D- Matrix.}$$

Das Wachstums zur dritten Potenz im Raum könnte durch spezielle Anordnung der Quellpunkte auf ein lineares Anwachsen in der dritten Dimension reduziert werden, wenn ein *quasi- 2D- Verfahren mit zusätzlichem Tiefenkanal* gewählt wird. Damit verbundene Einschränkungen vermindern die Anwendbarkeit des Verfahrens. Es entstünden Abbildungsfehler. Vergleichbar zur Fotografie könnte nur ein definierter Tiefenbereich scharfgestellt werden. In neuronalen Anwendungen würde die Einsatzmöglichkeit auf eine definierte Anordnung der Quellpunkte beschränkt. In einem abschließenden Schritt ist u.U. der Raum der Kanäle ξ, ψ, \dots, ζ zu ver- oder entzerren und dem Raum der Koordinaten x, y, z zuzuordnen. Dazu ist eine Koordinatentransformation zur Entzerrung in der Form

$$p_{x,y,z} = f(\xi, \psi, \dots, \zeta)$$

vorzunehmen. Dieser Schritt kann unter Rückgriff auf 3D-Rendering-Programme^{126), 127)} erfolgen, um eine Schnittstellenkompatibilität zu verschiedenen grafischen Ausgabemedien sicherzustellen. PC- basierende Lösungen benötigen noch recht hohe Rechenzeiten. Die Berechnung eines 2D- Interferenzraumes etwa mit einem einzelnen i860- Prozessor mit etwa 80 Megaflops benötigt etwa eine Minute. Etwa vergleichbar schnell wäre eine Lösung mit vier INMOS- Transputern IMS-T9000 (4*15 Megaflops). Zur Entwicklung von PC- Boards erscheinen RISC- Lösungen dennoch geeigneter, da die Organisation der Kommunikation

¹²⁶⁾ PHIGS/PHIGS+ Standard ISO/IEC 9592-1, DIN EN 29592 (I-DEAS, pro/Engineer, Softimage etc.); DXF (AutoCAD), Postscript, HPGL (Laserdrucker), TeX/LaTeX (Verlagsindustrie), X11/PEX (UNIX), Windows-Metafile (PCs etc.)

¹²⁷⁾ MANNA: VIS-A-VIS: Paralleles Volumen- Rendering auf MANNA. FhG- IGD, Dr. M. Göbel, A. del Pino, FhG 04 03 93 IGD.

zwischen Transputern zusätzlichen Aufwand erzwingt. Um eine schnelle Pixle-Grafikdarstellung zu erhalten, sollten Entwicklungsboards bevorzugt werden, die den Bildspeicher des Systems inklusive VGA- Grafikprozessor enthalten. Damit erübrigt sich zeitraubendes Datentransfer über den Systembus. Dieser Vorteil kommt allerdings erst mit höheren Pixeltransferraten zum tragen, als mit zB. einem Intel *i860* faltbar sind. Ein Nachteil des *i860* ist daneben das für Interferenzfaltungen zu genaue Datenformat. Betrachtungen zur Fehlerentwicklung bei Mehrfachmultiplikation und anschließender Integration können zeigen, daß Auflösungen von 4...8 Bit für die Datendarstellung eines Interferenzkanals genügen.

Besonderheiten interferenzieller Bildarstellungsverfahren

Neben der Relevanz für biologische Informatik besitzen Interferenzverfahren eine Reihe von interessanten Eigenschaften. Insbesondere für die Erforschung von Interferenzverfahren als zukünftiges Medium elektronischer Bilddarstellung sprechen vielfältige Eigenschaften:

- Interferenz- Verfahren sind *bis auf das einzelne Pixle parallelisierbar*, aus der PC-Lösung kann zukünftig direkt eine echtzeitfähige, integrierte Lösung abgeleitet werden, die *Geschwindigkeit eines solchen Systems richtet sich nach dem Preis*. I.-Verfahren eignen sich für beliebig *tiefes Pipelining*.
- Die *Auflösung* jedes darzustellenden Gegenstands ist verfahrensbedingt *einstellbar*, sodaß sie nicht höher als die Pixle- Auflösung sein muß.
- Interferenzielle Codierung zeigt u.U. eine *exponentielle Zunahme darstellbarer Bilder bei einem linearen Anwachsen des benötigten Speicherplatzes*.
- Über die inverse Kanallänge wird die *Bildqualität* bestimmt. Das Verfahren kann über die *Wahl der Schrittweite* gleitend zwischen langsam und hochauflösend, oder schnell und grob eingestellt werden.
- Pulsodierte Interferenzverfahren sind *unempfindlich gegenüber variabler Bandbreite eines Übertragungskanals*. Je schmaler die Bandbreite, desto langsamer geht der Bildaufbau vor sich. Starke Konturen erscheinen zuerst, schwache später.
- *Zoom, Move, Rotate und Overlay sind elementare Operationen*, die sich vorzüglich und einfach *im eindimensionalen Kanalraum* durchführen lassen. Sie entsprechen speziellen Verschiebe- und Verzögerungsoperationen mit Vektoren.
- Aufgrund der elementaren, und nur durch den Preis eingeschränkten Pixle-Parallelisierbarkeit ist es ein Verfahrensansatz, der im Bereich Multi- Media künftig *uneingeschränkte Echtzeitgenerierung* (virtual reality) beliebig repräsentierter Bewegtbilder gestatten wird.

Somit kann dieses Verfahren prinzipiell auch für allgemeine Multi- Media und Virtual Reality-Grafikanwendungen genutzt werden, sollten entsprechend hohe Rechenleistungen in naher Zukunft bereitstehen.

Mögliche Anwendungen

Mit der Entwicklung eines Verfahrens zur interferenziellen Rekonstruktion werden Voraussetzungen geschaffen, eine Vielzahl von Problemen, bei denen eine multipunktuelle Beobachtbarkeit eines niederfrequenten Interferenzraumes gegeben ist, dahingehend zu lösen, daß aus dieser punktuellen Beobachtung die Raumgestalt an sich rückrechenbar ist. Gleichzeitig werden Voraussetzungen für die Entwicklung spezieller Interferenzfeld- bzw. Faltungsprozessoren geschaffen. Eine effiziente, numerische Lösung des entarteten Faltungsintegrals durch preiswerte, spezifische Interferenzfeld- Prozessoren als IC (Integrated Circuit) werden eine ganze Reihe interessanter, industriell nutzbarer Produkte verbunden sein. Die Palette beginnt bei neurologischen Untersuchungsgeräten für die Medizintechnik, geht über billige, robuste, selbstreinigende Ultraschallkameras für Robotik unter rauen Umgebungsbedingungen sowie interferenziell arbeitenden Werkstoffprüfgeräten und endet bei intelligenten, sehenden, lernenden oder bewertenden Sensoren. Die Sicherungstechnik kann von derartigen Lösungen profitieren, da in einfacher Weise intelligente Überwachungsanlagen und intelligente Detektoren realisierbar werden.

Die Übereinstimmung der interferentiellen Proportionen von neuronalem Niederfrequenzraum und Radarraum kann für einfache, bildgebende Radargeräte für Flugzeuge genutzt werden.

Nicht zuletzt kann ein Feld medizinischer und werkstoffkundlicher Interferenzdiagnostik entstehen, das alte Echo- und Dichteverfahren in der Ultraschall- Diagnostik sowie in der Tomografie ablöst. In Folge wird die grafische Datenverarbeitung profitieren, bis eines Tages Grafik- Prozessoren direkt mit Interferenzprinzipien arbeiten können (diese gestatten die Ausführung bestimmter, oft benötigter Operationen, wie Zooming, Moving und Overlay in einfachster Weise, und unter Realzeit- Bedingungen). Auch wird sich ein Zweig ultraschneller, *nichtiterativer*, 'sehender' Robotik herausbilden, bei dem die in der Biologie benutzten Verfahren angewandt werden können, und der sicherlich im militärischen Bereich Relevanz besitzen kann.

Zu erschließende Anwendungen sind neuronal- bildgebende Untersuchungsgeräte für die medizinisch- neurologische Diagnostik, sowie indirekt Ultraschall- Kameras für Medizin, Robotik und Werkstoffuntersuchungen. Der vorgestellte Algorithmus kann der Zielstellung dienen, eine spezielle Klasse von Faltungsprozessoren als IC zu entwickeln, die Rekonstruktionen aus Ultraschall- und neuronalen Feldern in Echtzeit für Multimedia- Anwendungen gestatten. Zur Zeit sind die für Interferenzanalysen zu bewältigenden Rechenleistungen noch unwirtschaftlich, da sie spezielle, extrem teure Parallelrechner voraussetzen. Die Chip- Integration hat aber ein Niveau erreicht, daß praktikable Rechenleistungen für spezielle Probleme im Bereich ab 1Gigaflop pro Sekunde pro Chip schon heute bereitstellt (Beispiel Siemens-IC MA16: 800 Megaflops, 16×16 Matrix- Multiplikation, 610k Transistoren, 319 Pin, 187mm^2 , $1\mu\text{m}$ CMOS, 50 MHz, 10,9 Gigabit/sec). Entwicklungen auf diesem Gebiet werden sich bereits mittelfristig hoch amortisieren.