(bitte Javascript einschalten)

Heinz, G.: Integrating System-Theory into Interference Networks - relation between convolution integral and interference integral. Workshop "Autonome Systeme", Oct 30 - Nov 3, 2011, Gran Camp de Mar, Av. Gabriel Covas Alemany 2, 07160 Camp de Mar, Andratx (Mallorca, Spain).

Beziehungen zwischen Faltungs- und Interferenzintegral als Verbindung zwischen Hören und Sehen

Gerd Heinz, GFaI Berlin

Site location www.gfai.de/~heinz/publications/animations/convolution.htm

Einführung

Die Faltung (oder das Faltungsintegral) beschreibt die Verknüpfung zweier Funktionen, Ergebnis ist eine dritte Funktion:

$c(t) = a(t) * b(t);$

$c(t) = {}_0\int^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau$

In diskreter Form betrachten wir die Folge der Faltungssummen

$c(n) = \Sigma_{\tau=0:n} \left(a(n-\tau)\, b(\tau) \right)$

Die hier benutzten Zeitfunktionen seien nur in dem uns interessierenden Bereich ungleich Null. Wir gehen davon aus, daß die Definitionsbereiche der Funktionen übereinstimmen.

Wie es für die Physik undenkbar ist, ohne Maßeinheiten zu arbeiten, so ist es für die Mathematik undenkbar, Maßeinheiten zu verwenden. Man denke an den Satz des Pythagoras, der in verschiedensten Maßsystemen genutzt wird.

Problematisch wird es dann, wenn eine mathematische Formel physikalisch betrachtet in verschiedenen Einheitenwelten gleichzeitig beheimatet ist: Diese Bedeutung kommt der Faltung aus Sicht der Interferenznetzwerke zu: die Faltung ist in Raum und Zeit gleichzeitig angesiedelt. Interferenznetze aber verbieten genau diese Eigenschaft. Eine Netzwerkknoten kann nicht verzögern, das kann nur ein Zweig des Netzwerkes. Als Interferenznetzwerk ist die Faltung folglich keine Elementaroperation, sie kann nur als Netzwerk in Raum und Zeit dargestellt werden.

Im Buch "Neuronale Interferenzen" (1993) finden wir abstrahierte Nervennetze, die "Codeselektion mit Laufzeitleitungen" beschreiben [6]. Ideelle Basis sind Faltung und IIR-Filter als universelle Grundlage von Filterrealisierungen in integrierten Schaltkreisen. Leider sind die Ausführungen dort recht knapp.

Was Laplace- und Fouriertransformation im Frequenzbereich leisten, leistet die Faltung im Zeitbereich. Unterstellen wir, ein Nervennetz hat keinen FFT-Prozessor, kann es Code-Selektionsleistungen ("Hören") nur im Zeitbereich erbringen auf Basis der Faltung mit inherenten (in der Strukturierung des Nervennetzes liegenden) Übertragungsfunktionen. Da anzunehmen ist, daß die enormen Leistungen unseres Hörsystems auf ebendiese Filterstrukturen zurückgehen, erscheint es interessant, Möglichkeiten der Faltung im Interferenznetzwerk etwas näher zu beleuchten.

Zur Historie des Faltungsbegriffs

Der Begriff "Faltung" geht zurück auf die im ersten Arbeitsschritt erforderliche Spiegelung einer ersten Zeitfunktion an der Nullachse ($-\tau$). Die Operation stellt eine verallgemeinerte Multiplikation parallel liegender und gegeneinander laufender Vektoren dar. Mit der Faltung eines Papierblatts gelingt es, einen Vektor umzukehren und damit die Vektoren gegeneinander zu führen, um Schritt für Schritt gegenläufige Partialprodukte zu erhalten. Inhaltlich ist die Idee offenbar sehr alt, der Name kam indes spät. Cauchy untersucht Produkte unendlicher Reihen. Vito Volterra untersucht 1913 Eigenschaften permutierbarer Funktionen "fonctions permutables", [1] S.148 ff., die wir heute als Faltungsintegrale bezeichnen würden. Er kommt übrigens von einer symmetrischen Form der permutierbaren Funktionen auf die heute übliche, unsymmetrische Darstellung im Bereich (0....t).

In der heute gebräuchlichen Weise taucht der Begriff nach meinen Recherchen zuerst bei Bernstein 1920 [2] S.817 auf. Gustav Doetsch [3] übernimmt und verbreitet die "Faltung" ab 1923 weltweit. Nach dem zweiten Weltkrieg gebraucht man fortschreitend den Begriff "Convolution". Inhaltlich sollen permutierbare Funktionen nach Wolfersdorf [4] "seit Poissons Memoir über die Bewegung von Wellen 1818" bekannt sein. Meine Durchsicht der Wellentheorie Poissons wie auch seiner Variation der Konstanten in [5] läßt keinen solchen Schluß zu, möglicherweise sind die Ansätze zu versteckt, um sofort entdeckt zu werden.

Wunsch [7] weist auf die Bedeutung der Faltung zur Ausbildung der Operatorenrechnung zeitlich zwischen Heaviside und Mikusinski hin. So wird z.B. aus der Faltung mit einer Sprungfunktion der Integrationsoperator Mikusinski's. Wenn die Systemtheorie heute in Fragen der Stabilitätsanalyse von Netzwerken bei Küpfmüllers Vierpolen und Spice-artigen Netzwerksimulationen steht, dann läßt sich erahnen, wieviel unendlich kühne Vision noch gefordert ist, ehe wir eines Tages die Stabilität oder (krankhafte) Instabilität in der Evolution großer, neuronaler Netze (Gehirn) aus Milliarden von Knoten und Zweigen verstehen werden.

Während Faltung über die mathematische Systemtheorie und die (digitale) Signalverarbeitung das "Hören" dominiert, ist "Sehen" an Interferenznetzwerke und Interferenzintegrale gekoppelt. Interferenzintegrale können all das beschreiben, was als sog. Bildgebung zwischen Retina und Cortex, zwischen Retina und Umgebung, was bei Fernrohr, Radar oder Sonar abläuft. Erster Demonstrator der Interferenzintegrale war mit akustischen Bildern und Filmen die akustische Kamera. Eine Schlüsselrolle spielt bei ihr die Möglichkeit der Bild-Rekonstruktion durch Zeitumkehr (Verzögerungsinversion), siehe [9], Bild 13, hier wurde erstmals erkennbar, daß virtuelle, rechnerimplementierte Interferenznetze noch mehr leisten können, als Ihre natürlichen Verwandten (Nervennetze). Durch Vermeidung von Überbestimmtheit gelingt es, einen beliebig großen Öffnungswinkel (Apertur) der akustischen Kamera zu erreichen.

Im Aufsatz soll versucht werden, den Zusammenhang zwischen Faltungs- und Interferenzintegralen zu beleuchten.

Faltung im Interferenznetzwerk (IN)

Wir wollen uns hier mit einer spezifischen Anordnung eines Interferenznetzwerkes beschäftigen, welches eine Grundlage aller Systemtheorie darstellt. Die Kraft dieses winzigen Interferenznetzes, Zeitfunktionen umzuwandeln, ist gut erforscht. Insofern mag dieses kleine

Netz, das im Nervensystem mit wenigen Neuronen darstellbar ist, eine Ahnung von der gigantischen Leistungsfähigkeit nervlicher Netze geben.

Entgegen einer landläufigen Annahme, die Faltung arbeite nur im Zeitbereich, ist die Faltung (die Faltungssumme, bzw. das Faltungsintegral) aus physikalischer Sicht - d.h. bei Einführung einer Leitgeschwindigkeit - in Zeit und Raum zugleich anzusiedeln. Die Netzwerk-Implementierung (der Normalform) der Faltung, das sog. FIR-Filter (Finite Impulse Response), kann aus physikalischer Sicht vorzüglich als Interferenznetzwerk untersucht werden.

Sind Leitgeschwindigkeiten der Signale in einem System *nicht* vernachlässigbar, betreten wir das Gebiet der Interferenznetzwerke (IN), der Netzwerke zwischen Zeit und Raum. Wie die Verzögerungsglieder in Bild 1 zeigen, ist diese Annahme gerechtfertigt. Interferenznetze sind streng physikalisch zu betrachten. Wege und Verzögerungszeiten sind Zweigen zugeordnet, ein Knoten darf nur eine einzige Zeitfunktion, nicht aber mehrere, oder zueinander verzögerte Zeitfunktionen tragen. Wird eine Zeitfunktion verzögert, ist dafür ein Zweig und ein neuer Knoten zu bilden.

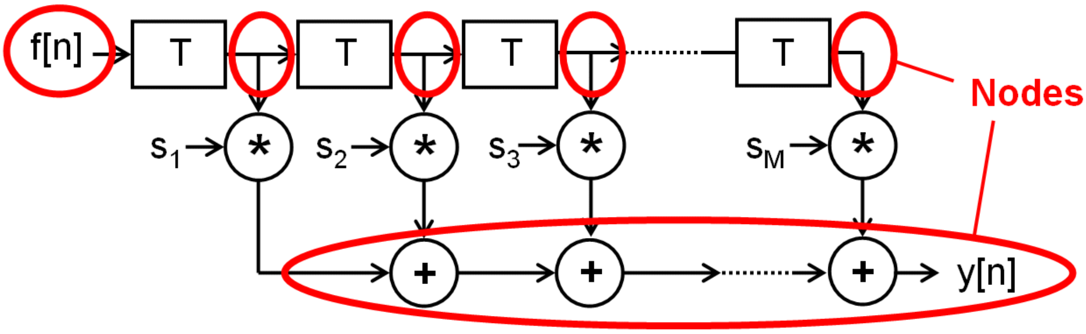

Bild 1: FIR-Filter mit zwei Vektoren *f[n]* und *s(m)*.

In Nervennetzen sind Strukturen [6] zu erahnen, die FIR-Filtern ähneln. Wir wollen der Frage nachgehen, wie solche Filter aus physikalischer Sicht analysierbar sind, und hinterfragen, wie diese in das mathematische Fundament der Systemtheorie passen. Wie sieht also eine Faltung aus physikalischer Sicht aus?

Obwohl Faltungsnetzwerke nervlicher Art in [6] bereits eingeführt und empirisch charakterisiert wurden, entzog sich der mathematische Faltungsbegriff bislang mehr oder minder dem physikalischen, soll heißen dem interferenziellen Zugang. In mir war seit 1993 die Hoffnung, die Faltung doch noch als Elementaroperation in Interferenznetzwerken entdecken zu können. Aber irgendwann kam die Erkenntnis, daß die Faltungsoperation *keine interferenzielle Elementaroperation darstellen kann*. Wir wollen hier insbesondere dieser Frage nachgehen.

Sehen wir uns dazu ein physikalisch realisiertes FIR-Filter als Prototyp des Faltungsoperators an, Bild 2. Verzögerungen können in IN nur Zweige leisten. Die Verzögerungskette im Eingang eines FIR ist folglich als einzelner Netzwerkknoten nicht darstellbar. Ein FIR-Filter (ein Faltungsfilter) oder eine Faltung schlechthin, ist nur als *interferenzielles Netzwerk* (IN), nicht aber als einzelner Knoten (Node) umzusetzen. Verzögerungen τ_i zwischen Netzwerkknoten assoziieren über Leitgeschwindigkeiten v_i mit Abständen $r_i = v_i \tau_i$. Verzögerungen τ_i sind i.a. - physikalisch betrachtet - voneinander verschieden.

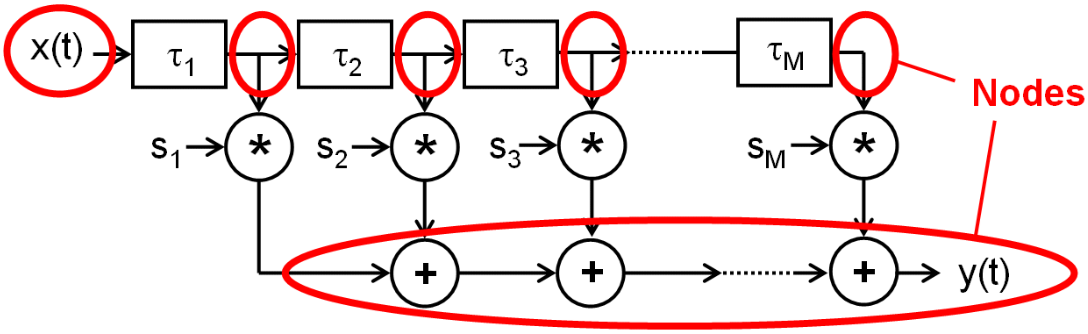

Bild 2: Physikalisches Analogon zur Faltung einer Zeitfunktion *x(t)* mit Zeitfunktionen *$s_i(t)$*.

Man beachte, daß der Ergebnis-Summenknoten für *y(t)* aber sehr wohl als einzelner Knoten in einem IN darstellbar ist, da er keine internen Verzögerungen besitzt.

Leitgeschwindigkeit

Breitet sich ein Signal mit definierter Leitgeschwindigkeit v zwischen zwei Knoten aus, kommen Zeit und Raum in interferenziellen Zusammenhang. Eine Verzögerungszeit τ zwischen zwei Knoten ist in linearer Näherung abhängig vom Abstand r mit

$\tau = r / v$.

Übertragen in die diskrete Darstellung folgt

$T = \tau/dt = r/v\,/dt = R/V$.

wenn $dv = dr / dt$ die differentielle Geschwindigkeit, $R = r/dr$ den normierten Abstand und $V = v/dv$ die normierte Geschwindigkeit darstellt.

Faltung, physikalisch

Betrachten wir eine Schaltung ähnlich einem Faltungsfilter (Bild 2) als Interferenznetzwerk. Zunächst wollen wir gestatten, daß Koeffizienten s_i den Charakter von Zeitfunktionen haben (allgemeiner Fall).

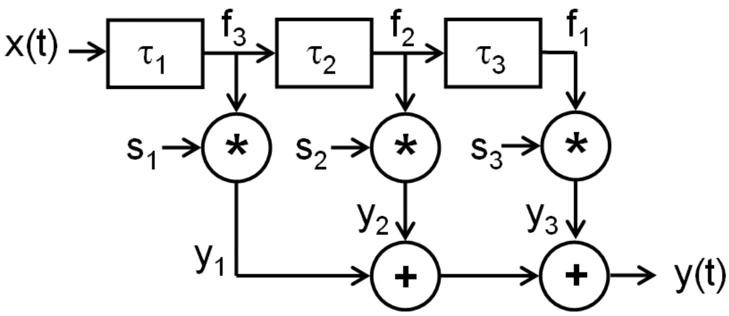

Bild 3: Physikalisches FIR-Filter mit drei Koeffizienten als Interferenznetzwerk

Wir können aus dem Bild ablesen:

$y1(t) = s1(t)\ f3(t)$

$y2(t) = s2(t)\ f2(t)$

$y3(t) = s3(t)\ f1(t)$

$f3(t) = x(t - \tau 1)$

$f2(t) = f3(t - \tau 2) = x(t - \tau 1 - \tau 2)$

$f1(t) = f2(t - \tau 3) = f3(t - \tau 2 - \tau 3) = x(t - \tau 1 - \tau 2 - \tau 3)$

$$\begin{aligned} y(t) &= y1(t) + y2(t) + y3(t) \\ &= s1(t)\, f3(t) + s2(t)\, f2(t) + s3(t)\, f1(t) \\ &= s1(t)\, x(t - \tau 1) + s2(t)\, x(t - \tau 1 - \tau 2) + s3(t)\, x(t - \tau 1 - \tau 2 - \tau 3) \end{aligned}$$

Abweichend von bekannten, mathematischen Faltungsmodellen charakterisiert die Formel dieses Interferenznetz *auch* für verschiedene Verzögerungen. Für ein Netzwerk mit M Knoten finden wir entsprechend

$$y(t) = s_1(t)\, x(t - \tau_1) + s_2(t)\, x(t - \tau_1 - \tau_2) + ... + s_M(t)\, x(t - \tau_1 - \tau_2 - ... - \tau_M) \qquad \text{(Eqn.1)}$$

Die Formel zeigt bereits zwei Wesenseigenschaften von Interferenznetzen:

- Erstens ist bei Skalierung oder Änderung der *Verzögerungszeiten* zu erkennen, daß sich die Systemantwort grundlegend verändert;
- Zweitens verändert sich die Systemantwort grundlegend bei Veränderung der *Gewichte* (oder Koeffizienten).

Interferenznetze reagieren folglich empfindlich bei Änderung von Verzögerungszeiten (delays) wie bei Veränderung von Gewichten (weights).

Für den Fall identischer Verzögerungszeiten $(\tau = \tau 1 = \tau 2 = \tau 3 = r/v,$ r: Abstand, v: Leitgeschwindigkeit) zwischen den Knoten entsteht eine Summenformel, die zusätzlich zeitlich veränderliche "Koeffizienten" $s_m(t)$ gestattet

$$y(t) = \sum_{m=1:M} (s_m(t)\, x(t - m\tau)). \qquad \text{(Eqn.2)}$$

Im Fall eines zeitlich unveränderlichen, infinitesimal dichten Koeffizientenvektors s entsteht ein Integral vergleichbar dem Faltungsintegral

$$y(t) = x(t) * s(t) = \int (s(\tau)\, x(t - \tau)\, d\tau. \qquad \text{(Eqn.3)}$$

Faltung, mathematisch

Für den Fall identischer Verzögerungszeiten zwischen den Knoten $(\tau = \tau 1 = \tau 2 = \tau 3)$ und für den Sonderfall systolischer Netze oder zellularer Automaten, bei denen Orts- und Zeitbezug aufeinander normiert sind, folgt aus der dann zu erfüllenden Geschwindigkeitsbedingung $T = R/V = 1$ die Vereinfachung $T = \tau = 1$

$$y[n] = s1\, f[n-1] + s2\, f[n-2] + s3\, f[n-3]. \qquad \text{(Eqn.4)}$$

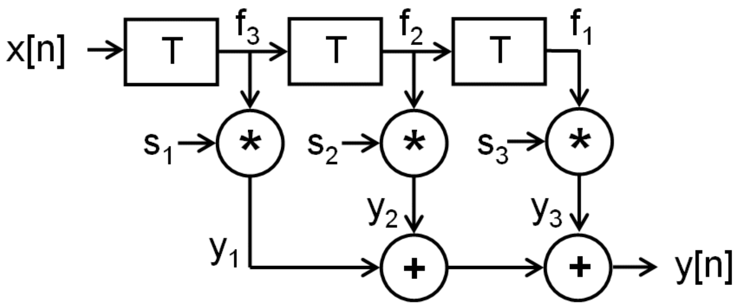

Bild 4: Klassisches FIR-Filter mit drei Koeffizienten und normierter Raum- Zeit-Struktur.

Setzen wir in diese Formel einige Werte für [n] ein. Wir nehmen an, daß nur die Werte *f[1]...f[3]* von Null verschieden sind. Alle anderen Produkte sind Null und werden gestrichen.

n=1: $y[1] = \cancel{s1\ f[0]} + \cancel{s2\ f[-1]} + \cancel{s3\ f[-2]}$

n=2: $y[2] = s1\ f[1] + \cancel{s2\ f[0]} + \cancel{s3\ f[-1]}$

n=3: $y[3] = s1\ f[2] + s2\ f[1] + s3\ f[0]$

n=4: $y[4] = s1\ f[3] + s2\ f[2] + s3\ f[1]$

n=5: $y[5] = \cancel{s1\ f[4]} + s2\ f[3] + s3\ f[2]$

n=6: $y[5] = \cancel{s1\ f[5]} + \cancel{s2\ f[4]} + s3\ f[3]$

Nun führen wir anstelle der Ziffern im Index eine Variable m ein, wir beginnen mit *m=1*

$y[n] = s(m)\ f[n-1] + s(m+1)\ f[n-2] + s(m+2)\ f[n-3].$ (Eqn.5)

Man beachte, daß runde Klammern eigentlich einen Ortsbezug und eckige Klammern einen Zeitbezug darstellen. Da wir aber ein Netz mit normiertem Orts- und Zeitbezug ($1/dr = 1/dt$, $V = 1$) betrachten wollen, ist dies folgend nicht mehr von Belang.

Unter Weglassung des am Eingang liegenden Verzögerungsgliedes erhalten wir eine symmetrische Summenform (nach Dr. Wolfgang Harder)

$y(t) = \sum_{i=0:M} (s_{m+i}(n)\ x(n - i).$ (Eqn.6)

Mit Verzögerungsglied im Eingang kann Gleichung 4 in eine bekanntere Summenform umgeformt werden

$y[n] = \sum_{m=1:M} (s_m(n)\ f(n-m)).$ (Eqn.7)

Wird nun angenommen, die Zeitfunktionen s_1 bis s_M währen konstante Koeffizienten, dann folgt die Volterra'sche Faltungsformel [1]:

$y[n] = \sum_{m=1:M} (s(m)\ f(n-m)).$ (Eqn.8)

Entgegen anderslautenden Veröffentlichungen gilt diese Formel streng genommen *nur mit Verzögerungsglied T* zwischen *x[n]* und f_3. Vereinfachend werden Konvergenzkriterien hier nicht betrachtet.

Zusammenhang von Faltungs- und Interferenzintegral

Am Beispiel einer diskreten Faltung von *s(n)* und *f(n-m)* in der Form

$$y[n] = \Sigma_{m=1:3} (s(m) f(n-m)). \qquad \text{(Eqn.9)}$$

wollen wir den Zusammenhang zwischen der Grundoperation der Signaltheorie, dem Faltungsintegral und der Grundoperation der Welleninterferenz, dem Interferenzintegral, beleuchten. Dazu betrachten wir den zweiten Faltungsvektor *s* im interferenziellen Sinn als unbeweglich, als "stehende Welle" oder als "Koeffizientenvektor" im Sinne digitaler Filtertheorie.

Zur Erinnerung: In Interferenznetzen ist verzögerungsfreie Signalübertragung verboten. Verzögerungszeiten erzeugen stets neue Knoten. Der *s*-Vektor assoziiert damit im physikalischen Sinne mit Orten, während der *f*-Vektor mit Zeiten assoziieren muß. Verzögerungen *T* zwischen Netzwerkknoten assoziieren über die Leitgeschwindigkeit *v* mit Abständen *r* = *vT*.

In den Eingabefeldern (hellgrün) können Koeffizienten zweier Zeitfunktionen eingegeben werden. Der Algorithmus berechnet die Zeilensummen - das **Faltungsintegral** - in der rechten Spalte (blau), sowie die Spaltensummen - das **Interferenz-Integral** - in der letzten Zeile (rot). Die Zeitachse läuft vertikal, der Ort variiert horizontal. Wir können bemerken, daß das Faltungintegral nichtlokal agiert, während das Interferenzintegral streng auf je einen Knoten des Verzögerungsnetzwerkes (Interferenznetzwerkes) fokussiert ist.

(Eingaben können interaktiv im **grünen Bereich** verändert werden.)

Eingabefeld Zeit t |

Erste Zeitfunktion			1	2	3	|	———>
			f1	f2	f3		
Zweite Zeitfunktion			1	2	3	V	Ort τ
			s1	s2	s3		

Rücksetzen

Rechnen

Faltung der ersten Zeitfunktion

Erste Zeitfunktion	3	2	1				
Zweite Zeitfunktion unverändert			1	2	3		
Rechnung							Faltungssummen
Erste Zeitfunktion schieben		3	2	1			
Zweite Zeitfunktion multiplizieren			1	2	3		
Produkte			1				1
Erste Zeitfunktion schieben			3	2	1		
Zweite Zeitfunktion multiplizieren			1	2	3		
Produkte			2	2			4
Erste Zeitfunktion schieben			3	2	1		
Zweite Zeitfunktion multiplizieren			1	2	3		

Produkte	3	4	3			10
Erste Zeitfunktion schieben		3	2	1		
Zweite Zeitfunktion multiplizieren	1	2	3			
Produkte		6	6			12
Erste Zeitfunktion schieben			3	2	1	
Zweite Zeitfunktion multiplizieren	1	2	3			
Produkte			9			9
Summe der Faltungssummen						36
Interferenz-Summen	6	12	18		Gesamt:	36

Übungen mit der Rechentabelle

Um Eigenschaften von Faltung und Interferenzintegralen kennenzulernen, gebe man für die erste Zeitfunktion z.B. einen Stoß ein: {0,0,1}, {0,1,0} oder {1,0,0}. Danach bitte rücksetzen und dieselben Werte statt in die erste in die zweite Zeitfunktion eingeben. Wir sehen, daß jeweils die andere Zeitfunktion mit dem Eins-Impuls reproduziert wird. Man beachte auch die Interferenzsummen.

Jetzt prüfen wir eine Sprungfunktion und geben dazu in die erste Zeitfunktion {1,1,1} ein. Wir finden verdreifachte Interferenzsummen "die Gleichspannungsverstärkung ist die Summe der Koeffizienten".

Nun füllen wir alle Koeffizienten beider Zeitfunktionen mit Eins und finden eine integrale Pyramide.

Zum Schluß können wir noch die Folge {1,-2,1} eingeben. Die Summe der Koeffizienten ist Null, das Ergebnis dito.

Diskussion

Summiert (integriert) man die Summen (Interferenz-Integrale, I^2) der Knoten des betrachteten Faltungsnetzwerkes (letzte Zeile), so arbeitet man notwendigerweise mit der vollständigen Produktmatrix (dyadisches Produkt; Tensorprodukt 2.Stufe, Rang1) beider Vektoren. Betrachtet man die Faltung als verallgemeinerte Multiplikation, baut sie auf ebendieser Produktmatrix auf. Vergleiche dazu auch die Korrespondenz der Faltung zur Polynommultiplikation [11] (Textfile).

Vorausgesetzt, beide Vektoren sind bis auf betrachtete Elemente Null, dann ist die Summe über die Faltungssummen (das Integral über die Faltungsintegrale) gleich der Summe über die Interferenzsummen (dem Integral über die Interferenzintegrale). Das ist nicht verwunderlich, zeigen doch beide Summen den Wert der reduzierten Matrix [*i,i*] = [*1,i*] * [*i,1*] an, wenn wir gleich lange, von Null verschiedene Vektoren der Länge *i* annehmen. Auf Beweise soll zunächst verzeichtet werden.

Der Unterschied zwischen Faltungsintegral und Interferenzintegral besteht darin, daß bei der *Faltung diagonal*, bei der *Interferenz vertikal* über die Elemente der Matrix summiert wird. Man beachte aber, daß es sich in horizontaler Richtung im physikalischen Sinn um verschiedene Orte handelt, in vertikaler Richtung aber um verschiedene Zeiten.

Statt mit unendlichen Reihen zu rechnen, reduzieren wir die Faltung auf wenige, von Null verschiedenen Elemente, im Beispiel sind es je drei. Nun führen wir die Faltung mit Scilab aus.

convol ([1 2 3], [1 2 3]) = [1 4 10 12 9]   (Eqn.10)

Man vergleiche das Ergebnis mit der blauen Spalte der Faltungssummen in der Rechentabelle.

Matrixsumme

Bezeichnen *f = [f1 f2 f3]* und *s = [s1 s2 s3]* die von Null verschiedenen Terme der zwei Zeitfunktionen, so läßt sich eine Produktmatrix $[f^T \cdot s]$ bilden:

$$[f^T s] = \begin{matrix} f1s1 & f1s2 & f1s3 \\ f2s1 & f2s2 & f2s3 \\ f3s1 & f3s2 & f3s3 \end{matrix} \qquad \text{(Eqn.11)}$$

Die Summe aller ($n \cdot m$) Koeffizienten der Produktmatrix vom Format *[n, m]* soll mit dem Namen "Matrixsumme" bezeichnet werden. Die Matrixsumme *matsum* unseres Beispiels ist

matsum = sum $[f^T \cdot s]$ = f1s1 + f1s2 + f1s3 + f2s1 + ... + f3s3.   (Eqn.12)

Interferenzsummen (Raum-, Ort- oder Knoten- Summen)

Interferenzsummen (Interferenzintegrale) *int* werden pro Ort bzw. Schaltungsknoten - hier vertikal - berechnet (die Zeit läuft im Beispiel nach unten):

int1 = f1s1 + f2s1 + f3s1;
int2 = f1s2 + f2s2 + f3s2;
int3 = f1s3 + f2s3 + f3s3;

intsum = int1 + int2 + int3;   (Eqn.13)

So ist die Interferenzsumme *int2* in der Matrix der mittleren Spalte (rot) zuzuordnen:

	s1	s2	s3
f1	f1s1	f1s2	f1s3
f2	f2s1	f2s2	f2s3
f3	f3s1	f3s2	f3s3

Hinter den Termen finden wir die komplementären Reihenentwicklungen

$y[n] = \sum_m f[m]\, s[n]$ *(Eqn.14)*

$y[m] = \sum_n f[n]\, s[m].$ (Eqn.15)

und in formaler Analogie mit der Zeit $n \sim t$, dem Ort $m \sim \tau = r/v$ und den Differentialquotienten $dt = 1/f_s$ bzw. $d\tau = dr/v$ die Integrale

$y(t) = \int f(\tau)\, s(t)\, d\tau$ **Zeitfunktion** (a) (Eqn.16)

$y(\tau) = \int f(t)\, s(\tau)\, dt.$ **Ortsfunktion** (b) (Eqn.17)

Wir bemerken bitte, daß wir über (a) Ort *($\tau = r/v$)* oder (b) Zeit (*t*) integrieren und das Ergebnis für eine konstante (a) Zeit oder einen definierten (b) Ort erhalten. Der Begriff "Ortsfunktion" ist entsprechend als "Funktion eines (einzigen) Ortes" zu interpretieren, Zeitfunktion in Analogie als "Ortswelle bei stillstehender Zeit".

Faltungssummen

Ablesbar aus dem Schema stellen Faltungssummen (Faltungsintegrale) *con* offenbar diagonale Summationsketten dar, hier:

con1 = f1s1;
con2 = f2s1 + f1s2;
con3 = f3s1 + f2s2 + f1s3;
con4 = f3s2 + f2s3;
con5 = f3s3;

consum = con1 + con2 + con3 + con4 + con5. (Eqn.18)

In der Matrix bezeichnet z.B. die Faltungssumme *con3* die blau gefärbte Diagonale:

	s1	s2	s3
f1	f1s1	f1s2	f1s3
f2	f2s1	f2s2	f2s3
f3	f3s1	f3s2	f3s3

Damit werden im physikalischen Sinne bei der Faltung in Zeit oder Raum unzusammengehörige Werte multipliziert.
Folglich ist die Faltung ein Zeit- und Raum- Produkt.

Wie leicht zu überprüfen ist (siehe Quelltext), werden in beiden Fällen *alle* Teilprodukte der Produktmatrix summiert, die Summen über die Integralwerte sind damit identisch und gleich der Matrixsumme *matsum*:

intsum = consum = matsum (Eqn.19)

int1 + int2 + int3 = con1 + con 2 + con 3 + con 4 + con5 . (Eqn.20)

Es ist zu erkennen, daß die Anzahl der Summanden prinzipbedingt links und rechts variert.

Hinter den Termen finden wir die komplementären Reihenentwicklungen

$y[n] = \sum_m f[n - m]\, s[m]$ (Eqn.21)

$y[m] = \sum_n f[m - n]\, s[n].$ (Eqn.22)

und in formaler Analogie mit der Zeit $n \sim t$, dem Ort $m \sim \tau = r/v$ und den Differentialquotienten $dt = 1/f_s$ bzw. $d\tau = dr/v$ die Integrale

$y(t) = \int f(t-\tau)\, s(\tau)\, d\tau$ (Zeitfunktion) (Eqn.23)

$y(\tau) = \int f(\tau-t)\, s(t)\, dt$ (Ortsfunktion). (Eqn.24)

Wir bemerken bitte, daß wir über Ort $(\tau = r/v)$ oder Zeit (t) integrieren und das Ergebnis für Zeit oder Ort erhalten.
Bezogen auf unser Beispiel erhalten wir *con1 = y(2), con2 = y(3), conx = y(x+1).*

Zeitsummen*

*Auf diese dritte, zunächst formale Analogie machte Dr. Friedrich Blutner anl. einer Diskussion aufmerksam.

Ordnen wir die Produktmatrix nach Summen (Integralen) *tim*, die genau für je einen Zeitpunkt gelten, so erhalten wir

tim1 = f1s1 + f1s2 + f1s3;
tim2 = f2s1 + f2s2 + f2s3;
tim3 = f3s1 + f3s2 + f3s3;

timsum = tim1 + tim2 + tim3; (Eqn.25)

Dies sind Summen (Integrale), die der Horizontalen zuzuordnen sind. So ist das Zeitintegral *tim2* der mittleren Zeile (grün) zuzuordnen:

	s1	s2	s3
f1	f1s1	f1s2	f1s3
f2	f2s1	f2s2	f2s3
f3	f3s1	f3s2	f3s3

Wie leicht zu überprüfen ist, werden auch in diesem Falle *alle* Teilprodukte der Produktmatrix summiert, die Summen über die Zeitsummen sind damit identisch zu den Summen über die Summen der Interferenzwerte und die Summen über die Summen der Faltungswerte:

timsum = intsum = consum = matsum (Eqn.26)

Die Trivialität dieser Herleitung sollte nicht über die gewaltige Aussagekraft der Gleichung hinwegtäuschen. Im physikalischen Sinne bedeutet es, daß für ein solches, begrenztes und diskretisiertes System die Summe der Zeitfunktionen gleich der Summe derr Ortsfunktionen gleich der Summe der Faltungsfunktionen gleich der Matrixsumme ist.

Anmerkung:

Hinter den Termen finden wir die komplementären Reihenentwicklungen

$y[n] = \sum_m f[n]\, s[m]$ (Eqn.27)

$y[m] = \sum_n f[m]\, s[n].$ (Eqn.28)

und in formaler Analogie mit der Zeit $n \sim t$, dem Ort $m \sim \tau = r/v$ und den Differentialquotienten $dt = 1/f_s$ bzw. $d\tau = dr/v$ die Integrale

$y(t) = \int f(t)\, s(\tau)\, d\tau$ (Zeitfunktion) (Eqn.29)

$y(\tau) = \int f(\tau)\, s(t)\, dt$ (Ortsfunktion). (Eqn.30)

Wir bemerken bitte wiederum, daß wir über Ort $(\tau = r/v)$ oder Zeit (t) integrieren und das Ergebnis für Zeit oder Ort erhalten.

Verallgemeinerung

Unabhängig von gewählten Eingangssignalen ist die Summe über die Interferenzsummen offenbar unter geeigneten Randbedingungen gleich der Summe über die Faltungssummen gleich der Summe über die Zeitsummen.

Zwei diskrete Zeitfunktionen (Vektoren) der Länge n und m zeigen präziser gesagt eine Summe der Faltungssummen gleich der Summe der Interferenzsummen gleich der Summe der Zeitsummen gleich der Summe der $(n \cdot m)$ Koeffizienten der Produktmatrix vom Format $[n, m]$ (Matrixsumme) mit m Interferenzketten der Länge n, mit n Zeitketten der Länge m, und mit $(n+m-1)$ Faltungsketten (verschiedener Länge).

(Der Fall n ungleich m ist dann relevant, wenn eine lange Zeitfunktion F auf einen kurzen, begrenzten Koeffizientensatz S angewandt wird, z.B. beim FIR-Filter.)

Für unser Beispiel gilt $n = m$. Damit hat die Produktmatrix die Form $[n, n]$, es entstehen n^2 Partialprodukte, n Interferenzketten der Länge n, n Zeitketten der Länge n und $(n^2 - 1)$ Faltungsketten verschiedener Länge,

$y = \sum_n y[n] = \sum_n \sum_m f[n-m]\, s[m] = \sum_n \sum_m f[m]\, s[n] = \sum_n \sum_m f[n]\, s[m]$ (Zeitfunktionen), (Eqn.31)

$y = \sum_m y[m] = \sum_m \sum_n f[m-n]\, s[n] = \sum_m \sum_n f[n]\, s[m] = \sum_m \sum_n f[m]\, s[n]$ (Ortsfunktionen). (Eqn.32)

Halbieren wir die Strecken zwischen je zwei Orten (horizontal) und zwischen je zwei Zeitpunkten (vertikal) und platzieren dort einen neuen Knoten, so verdoppelt sich jeweils die Vektorlänge f und s von n auf $(2n - 1)$, ohne daß die physikalischen Realitäten in Form des Verhältnisses zwischen Raum und Zeit (als Leitgeschwindigkeit) angetastet werden. Wiederholen wir diesen Vorgang beliebig oft, können wir formal auch zu einer integralen Schreibweise übergehen.

$$y = \int y(t)\, dt = \iint_{faltung}^{faltung} \{ f(t-\tau)\, s(\tau) \}\, d\tau\, dt = \iint_{ort}^{ort} \{ f(\tau)\, s(t) \}\, d\tau\, dt = \iint_{zeit}^{zeit} \{ f(t)\, s(\tau) \}\, d\tau\, dt$$ (Zeitfunktionen), (Eqn.33)

$$y = \int y(\tau)\, d\tau = \iint \{ f(\tau-t)\, s(t) \}\, dt\, d\tau = \iint \{ f(t)\, s(\tau) \}\, dt\, d\tau = \iint \{ f(\tau)\, s(t) \}\, dt\, d\tau \text{ (Ortsfunktionen).} \qquad \text{(Eqn.34)}$$

Man beachte, wie über den Ort ($\tau = r/v$) und über die Zeit t integriert wurde. Weitere Formen liessen sich in Analogie bilden, z.b. mit dem Satz von Fubini-Tonelli.

Interpretation

1. Als physikalischer (nervlicher) Operator besitzt ein Faltungsnetzwerk gleichzeitig Orts- und Zeitbezug.

2. Ein Faltungsfilter läßt sich aus physikalischer Sicht als Raum-Zeit-Netzwerk und als Interferenz-Netzwerk (IN), nicht aber als einzelner Netzwerk-Knoten eines IN beschreiben.

3. Somit kann die Faltung in einem Interferenznetz nicht als Elementaroperation auf einen Knoten abgebildet werden; oder in nervlicher Entsprechung: es sind Haufen von Neuronen erforderlich, um eine Frequenz- oder Code- selektive Leistung zu vollbringen.

4. Geeignete Konvergenzbedingungen und hinreichend lange Nullpuffer am Anfang und Ende der Zeitfunktionen vorausgesetzt,
   - ist die Summe über die Faltungssummen (ist das Integral über die Faltungsintegrale)
   - gleich der Summe über die Ortssummen (dem Integral über die Ortsintegrale (Interferenzintegrale))
   - gleich der Summe über die Zeitsummen (dem Integral über die Zeitintegrale).

5. Wird die Teilung der Ortsknoten und die Teilung der Zeitknoten vervielfacht, bleiben Faltungseigenschaften unangetastet. Physikalische Grundlage der physikalisch aufgefassten Faltung stellt eine mediale Leitgschwindigkeit oder deren Funktion dar.

6. Da es in Interferenznetzen verboten ist, nichtlokal über mehrere Orte zu rechnen, schiede die Faltung als Systemtheorie der Interferenznetze eigentlich aus. Wenn wir uns aber den Ergebnisort genauer ansehen, bemerken wir, das bei der Faltung die Addition der Teilprodukte ohne Verzögerung erfolgt (verzögert wird nur die erste Zeitfunktion). Folglich wirkt das Faltungsergebnis nur an einem einzelnen Knoten (Fußknoten in Bild 2). Sie ist damit in Interferenznetzen in der Form nach [6] zulässig.

7. Interessiert der Zeitverlauf der Faltung, so sind Faltungssummen nicht durch Interferenzsummen ersetzbar, da nur die Faltung zeitrichtige Summen liefert (Interferenzsummen sind Ortssummen, siehe zum Vergleich die Interferenzfaltung nach [10]).

8. Interferenznetzwerke in der Art nach [6] sind als Faltungsnetze geeignet, Frequenz- und Codeselektiv zu wirken.

9. Mit dem Doppelintegral kann das Fundament der Systemtheorie wie der digitalen Signalverarbeitung - die Faltung oder das Faltungsintegral - in das Gebiet der Interferenznetzwerke eingeordnet werden. Damit rücken analytische Beschreibungen für "Hören" und "Sehen" enger zusammen.

10. Während das Interferenzintegral an jedem Knoten eines Interferenznetzwerks anzutreffen ist, bedient das Faltungsintegral ein spezifisches Netzwerk.

Danksagung

Herzlichen Dank an Motivatoren und Mitdenker: Dank an Prof. Dr. Wolfgang Halang (Hagen) für eine Nudelrolle. Dank an Prof. Dr. Herwig Unger (Hagen) für Inspiration und "Anschieben" der

Untersuchung in Bangkok 2011. Dank an Dr. Friedrich Blutner (Geyer) und Dr. Wolfgang Harder (GFaI) für fachliche Inspirationen. Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Alfred Fettweis (Bochum) für den Beweisansatz [8] .

G. Heinz
Berlin, den 11. August 2011

Quellen

[1] Volterra, Vito: Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Paris: Gauthier-Villars, 1913. (Google Books Reprint of the University of Michigan Library, Lexington, KY, USA).

[2] Bernstein, F.: Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften XL, 21. Oktober 1920, S. 817 ff., http://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00014734.pdf.

[3] Doetsch, Gustav: Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus. Mathematische Annalen 89 (1923), Springer Verlag Berlin. Editor: Albert Einstein.

[4] von Woltersdorf, Lothar: Einige Klassen quadratischer Integralgleichungen. Sitzungsberichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Band 128, Heft 2. Hirzel Verlag Stuttgart, 11/2000, ISBN 3-776-1091-7.

[5] Poisson, Siméon Denis: Mémoire sur la variation des constantes arbitraires, dans les questions de méchanique (Variation of incremental constants, pages 1-70). Mémoire sur la théorie des ondes (Theory of Waves, pages 71..186). In: Mémoires de l'académie royale des sciences de l´institut de France, depuis l´ordonnance du 21 mars 1816. download unter http://books.google.de/

[6] Heinz, G.: Neuronale Interferenzen, Kap. 8b: Codeselektion mit Laufzeitleitungen. Autor gleich Herausgeber. Persönlicher Verteiler, 1993, 301 S, http://www.gfai.de/~heinz/publications/NI/KA08B.pdf.

[7] Wunsch, G.: Geschichte der Systemtheorie. Oldenbourg Verlag 1985, Kap. 1.3.1.3.

[8] Fettweis, Alfred: Beweisansatz der Identität zwischen Interferenz- und Faltungsintegral. Persönliche Kommunikation per Email, Bochum, 4.11.2011, http://www.gfai.de/~heinz/publications/animations/beweis.pdf. **(siehe Anlage)**

[9] Heinz, G.: Zur Mathematik des Nervensystems Raum-Zeit-Projektionen und Interferenzmuster zwischen verbundenen Wellenräumen. http://www.gfai.de/~heinz/historic/pressinf/bilder_d.htm

[10] Heinz, G.: Interferenzfaltung. In: Animationen eindimensionaler Wellen. Scilab Codebeispiel. http://www.gfai.de/~heinz/publications/animations/index_a.htm

[11] Heinz, G.: Analogien zwischen Faltungsintegral und Polynom- Multiplikation. Scilab Codebeispiel. http://www.gfai.de/~heinz/techdocs/polynom_convol.sce

[12] Heinz, G.: Codeselektion nervlicher Art mittels klassischer Faltung. Scilab Codebeispiel. http://www.gfai.de/~heinz/techdocs/conv_codeselection.sce

---

Impressum

File created 2011/09/11; modified 2011/11; Modifikationen 2013/06
Back: www.gfai.de/~heinz/publications/animations/index.htm
Homepage: www.gfai.de/~heinz

Anlage Beweisansatz von A. Fettweis

Laut der Gleichung unten auf Seite 1 (eqn.8)
kann geschrieben werden:

$$y(n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=-k}^{k} s(m)\, f(n-m), \quad \text{also} \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\, f(n-m)\;.$$

Daraus folgt zum einen die Kommutativität der Faltung, nämlich

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\, f(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\, s(n-m)\;,$$

zum anderen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) f(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \right] = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) \right]$$

Für das Beispiel auf Seite 2 (Rechentabelle) gilt damit richtig

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = 1+2+3=6, \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(n) = 1+2+3=6,$$

somit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(n) \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \right] = 6 \times 6 = 36\;.$$

Alfred Fettweis,
Bochum, den 4.11.2011